

Seconda Università degli Studi di Napoli

Corso di Laurea in Matematica

Corso di Laurea in Matematica e Informatica

Programma del corso di ALGEBRA 1

Anno Accademico 2002/2003

(Prof. Francesco Mazzocca)

PRELIMINARI E ARITMETICA IN Z . Richiami sulle operazioni tra insiemi e sulle funzioni. Proprietà fondamentali dell'anello degli interi Z . Principio di induzione. Principio di buon ordinamento. La divisione euclidea. Sistemi di numerazione. Divisibilità in Z . Massimo comune divisore, algoritmo di Euclide e identità di Bezout. Minimo comune multiplo. L'equazione diofantea $ax + by = c$. Numeri primi. Il teorema fondamentale dell'aritmetica.

ARITMETICA MODULARE. Relazioni di equivalenza e insiemi quoziente. Congruenze modulo un intero. L'anello Z_n degli interi modulo n . Elementi invertibili e divisori dello zero in Z_n^* . Funzione di Eulero. Teorema di Fermat-Eulero. Piccolo teorema di Fermat. Congruenze lineari. Teorema cinese del resto.

GENERALITÀ SULLE STRUTTURE ALGEBRICHE. Operazioni su un insieme e strutture algebriche. Isomorfismi. Elementi neutri. Elementi simmetrizzabili. Parti stabili, operazioni indotte e prime proprietà. Parte stabile generata da un insieme. Semigrupperi e prime proprietà. Elementi regolari. Elementi permutabili. Centro. Elementi cancellabili. Morfismi.

PRIME PROPRIETÀ DEI GRUPPI. Gruppi e primi esempi. Periodo di un elemento in un gruppo. Traslazioni. Sottogruppi di un gruppo. Test di sottogruppo. Intersezione di sottogruppi. Sottogruppo generato da un insieme. Sottogruppo generato da due sottogruppi. Sottogruppi permutabili. Gruppi ciclici. Sottogruppi di $(Z, +)$ e $(Z_n, +)$.

Il gruppo simmetrico S_n . Permutazioni disgiunte. Cicli. Fattorizzazione di una permutazione in cicli disgiunti e non banali. Notazione ciclica di una permutazione. Ordine di una permutazione. Inversioni e parità di una permutazione. Trasposizioni. Il gruppo alterno A_n . Gruppi di permutazioni e teorema di Cayley.

Esempi notevoli di gruppi: il gruppo lineare, il gruppo lineare speciale, il gruppo ortogonale e il gruppo ortogonale speciale, il gruppo delle simmetrie di una figura, il gruppo diedrale di grado n , prodotto diretto esterno di gruppi, il 4-gruppo di Klein,

il gruppo dei quaternioni.

Relazioni d'equivalenza associate ad un sottogruppo e laterali. Indice di un sottogruppo in un gruppo. Teorema di Lagrange.

PRIME PROPRIETÁ DEGLI ANELLI.

Anelli, domini d'integritá, corpi, campi e primi esempi. Caratteristica di un anello. Sottoanelli e ideali di un anello. Sottoanelli e ideali generati da un insieme. Ideali e anelli principali. Ideali massimali e primi. Ideali di Z e Z_n .

Il campo dei quozienti di un dominio di integritá e sue proprietá caratteristiche.

Divisibilitá nei domini d'integritá unitari. Elementi associati. Elementi irriducibili e primi. Divisibilitá e massimo comune divisore negli anelli principali.

Estensioni quadratiche di Z .

ANELLI DI POLINOMI. L'anello dei polinomi a coefficienti in un anello commutativo unitario. Funzioni polinomiali. Divisione euclidea negli anelli di polinomi. Divisibilitá negli anelli di polinomi. Anelli di polinomi in piú variabili.

Radici di un polinomio. Teoremi del resto e di Ruffini. Principio d'identitá dei polinomi. Polinomi irriducibili e primi. Divisibilitá in anelli di polinomi. Polinomi irriducibili e ideali.

Polinomi primitivi e lemma di Gauss. Irriducibilitá su Q di polinomi a coefficienti interi. Fattorizzazione unica in $Z[x]$.

Radici multiple di un polinomio. Fattorizzazione di polinomi su R e C .

QUOZIENTI E MORFISMI DI GRUPPI E ANELLI. Sottogruppi normali e gruppi quoziente. Morfismi di gruppi e teorema d'omomorfismo. Classificazione dei gruppi ciclici.

Anelli quoziente. Morfismi di anelli e teorema d'omomorfismo. Sottoanello fondamentale di un anello unitario. Sottocampo fondamentale di un corpo.

Testi consigliati:

- *Appunti delle lezioni*, distribuiti gratuitamente durante il corso.
- S. Franciosi, F. de Giovanni, *Elementi di Algebra*, Aracne Editrice.

Letture consigliate:

- M. Curzio, P. Longobardi, M. May, *Lezioni di Algebra*, Liguori Editore.
- G.M. Piacentini Cattaneo, *Algebra, un approccio algoritmico*, Decibel/Zanichelli.
- M. Curzio, P. Longobardi, M. May, *Esercizi di Algebra*, Liguori Editore.
- S. Franciosi, F. de Giovanni, *Esercizi di Algebra*, Aracne Editrice.

Pagine WEB: www.dimat.unina2.it/mazzocca/algebra1.htm