.

Capitolo 3

Relazioni d'ordine e d'equivalenza

3.1 Insiemi ordinati e reticoli

Sia S un insieme non vuoto.

Definizione 3.1.1 Un sottoinsieme $\Re$ del prodotto cartesiano $S \times S$ prende il nome di *relazione binaria* in S o piú semplicemente *relazione* su S. Se la coppia $(a, b) \in S \times S$ appartiene ad $\Re$, si dice che *a é in relazione con b* e si scrive $a\Re b$; in questo caso si dice anche che a e b sono *confrontabili* rispetto ad $\Re$. $\diamondsuit$

Figura 3.1: H.Hasse (1898-1979)

Definizione 3.1.2 Una relazione $\Re$ su S si dice d'*ordine* se sono verificate le seguenti tre proprietá:

1. $a\Re a$ per ogni $a \in S$ *(proprietá riflessiva)*

2. $a, b \in S$, $a\Re b$ e $b\Re a \Rightarrow a = b$ *(proprietá antisimmetrica)*

3. $a, b, c \in S$, $a\Re b\Re c \Rightarrow a\Re c$ *(proprietá transitiva)*.

Se $\Re$ é una relazione d'ordine su S, la coppia $(S, \Re)$ si chiama *insieme ordinato*. La relazione $\Re$ si dice di *ordine totale* se, per ogni $a, b \in S$, risulta $a\Re b$ o $b\Re a$. In questo caso si dice che $(S, \Re)$ é un *insieme totalmente ordinato* o *catena* o anche *insieme linearmente ordinato.* $\diamondsuit$

Di solito le relazioni d'ordine si denotano con i seguenti simboli: $\leq$, $\subseteq$. Quando si usa la notazione $\leq$, la scrittura $a \leq b$ si legge *a minore o uguale* a b.

Esercizio 3.1.3 *Sia $\leq$ una relazione d'ordine su S. Provare che la restrizione di $\leq$ ad ogni sottoinsieme non vuoto X di S é una relazione d'ordine su X (relazione d'ordine indotta).*

Esempio 3.1.4 Gli insiemi N_o, N, Z, Q, R con le usuali relazioni di *minore o uguale* sono insiemi totalmente ordinati. $\diamondsuit$

Esempio 3.1.5 Siano π e σ due partizioni di un insieme non vuoto S. Diciamo che π é *piú fine* di σ, e scriviamo $\pi \leq \sigma$, se ogni blocco di π é contenuto in qualche blocco di σ. La relazione $\leq$ é una relazione d'ordine nell'insieme $\Pi(S)$ di tutte le partizioni di S. $\diamondsuit$

Esercizio 3.1.6 *Sia $\leq$ una relazione d'ordine su S e si definisca su S la seguente relazione $\leq^*$*

$$a \leq^* b \quad \Leftrightarrow \quad b \leq a.$$

Provare che $\leq^*$ é una relazione d'ordine su S (relazione duale o opposta) e che la relazione $\leq^{**}$ coincide con $\leq$. Trovare le relazioni duali di quelle definite negli esempi precedenti.

Definizione 3.1.7 Per un sottoinsieme X di un insieme ordinato $(S, \leq)$ si danno le definizioni riportate nel seguente schema:

si dice che	se
$a \in S$ é un *minorante* di X	$a \leq x$ per ogni $x \in X$
$a \in S$ é *estremo inferiore* di X	a é un minorante di X e $y \leq a$, per ogni minorante y di X
$a \in S$ é *minimo* di X	a é estremo inferiore di X e appartiene ad X
$b \in S$ é un *maggiorante* di X	$x \leq b$ per ogni $x \in X$
$b \in S$ é *estremo superiore* di X	b é un maggiorante di X e $b \leq z$, per ogni maggiorante z di X
$b \in S$ é *massimo* di X	b é estremo superiore di X e appartiene ad X
X é *inferiormente limitato*	esiste un minorante di X
X é *superiormente limitato*	esiste un maggiorante di X
X é *limitato*	X é limitato inferiormente e superiormente
$a \in X$ *minimale* in X	$x \leq a$ con $x \in X$, allora $a = x$
$b \in X$ *massimale* in X	$b \leq x$ con $x \in X$, allora $b = x$

$\diamondsuit$

Esercizio 3.1.8 *Sia X un sottoinsieme non vuoto di un insieme ordinato $(S, \leq)$. Provare che valgono le seguenti proprietá:*

Figura 3.2: G.Boole (1815-1864)

1. Un estremo inferiore (risp. superiore) di X, se esiste, é unico (e si denota con $inf(X)$ (risp. $sup(X)$)).

2. Un minimo (risp. massimo) di X, se esiste, é unico (e si denota con $min(X)$ (risp. $max(X)$)).

3. Il minimo (risp. massimo) di X, se esiste, é l'estremo superiore (risp. inferiore) dei suoi minoranti (maggioranti).

Definizione 3.1.9 Un insieme ordinato $(S, \leq)$ si chiama *reticolo* se ogni suo sottoinsieme $\{a, b\}$ con due elementi possiede l'estremo inferiore (che si denota con $a \wedge b$) e l'estremo superiore (che si denota con $a \vee b$). Il minimo e il massimo di un reticolo, se esistono, si denotano rispettivamente con 0 e 1. $\diamondsuit$

Esercizio 3.1.10 *Provare che ogni insieme totalmente ordinato é un reticolo e calcolare $a \wedge b$ e $a \vee b$, per ogni coppia (a, b) di suoi elementi.*

Esercizio 3.1.11 *Provare che N, ordinato con la relazione di divisibilitá, é un reticolo e calcolare $a \wedge b$ e $a \vee b$, per ogni coppia (a, b) di suoi elementi.*

Esercizio 3.1.12 *Provare che l'insieme $P(S)$ delle parti di un insieme S, ordinato con la relazione di inclusione, é un reticolo e calcolare $X \wedge Y$ e $X \vee Y$, per ogni coppia (X, Y) di suoi elementi (tale reticolo si chiama algebra di Boole dei sottoinsiemi di S).*

Esercizio 3.1.13 *Provare che l'insieme $\Pi(S)$ delle partizioni di un insieme S, ordinato con la relazione di finezza, é un reticolo e calcolare $\pi \wedge \sigma$ e $\pi \vee \sigma$, per ogni coppia (X, Y) di suoi elementi (tale reticolo si chiama reticolo delle partizioni di S).*

Un insieme ordinato finito si puó rappresentare graficamente sul piano mediante un disegno, che si chiama *diagramma di Hasse,* costruito nel seguente modo: si fa corrispondere iniettivamente ad ogni elemento dell'insieme un punto del piano in modo che se $a \leq b$ il punto che rappresenta a stia *sotto* quello che rappresenta b e si congiungono con una linea due punti se corrispondono a due elementi a, b tali che $a \leq b$ e non esiste alcun $x \neq a, b$ per cui $a \leq x \leq b$.

Esempio 3.1.14 Nell'insieme N degli interi positivi la relazione $\Re$ definita da

$$a \Re b \Leftrightarrow a|b$$

é d'ordine. Questa relazione, per esempio, induce sull'insieme

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$$

dei divisori positivi di 84 l'ordine descritto dal diagramma di Hasse riportato nella figura 3.3. $\diamondsuit$

Figura 3.3: Reticolo dei divisori di 84

Esempio 3.1.15 Sia X un insieme non vuoto e $S = P(X)$ l'insieme delle parti di X. La relazione di *inclusione fra sottoinsiemi* di X é una relazione d'ordine su S. Per esempio, la figura 3.4 riporta il diagramma di Hasse dei sottoinsiemi di un insieme con tre elementi. $\diamondsuit$

Figura 3.4: Reticolo dei sottoinsiemi di un 3-insieme

3.2 Il lemma di Zorn ed una sua applicazione

Definizione 3.2.1 Un insieme ordinato $(S, \leq)$ si dice *induttivo* se ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato é superiormente limitato. ♢

Per gli insiemi induttivi vale il seguente importante teorema, del quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 3.2.2 (lemma di Zorn) *Ogni insieme induttivo é dotato di almeno un elemento massimale.*

Figura 3.5: M.Zorn (1906-1993)

Mostriamo un'applicazione del lemma di Zorn agli spazi vettoriali. A tale scopo ricordiamo alcuni risultati e definizioni noti dal corso di *Geometria I.*

Sia V uno spazio vettoriale sopra un campo K. Ricordiamo le seguenti definizioni.

Definizione 3.2.3 I vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, n intero positivo, si dicono *linearmente indipendenti,* se

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}\,, \text{ con } a_1, \ldots, a_n \in K \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\,.$$

Nel caso contrario si dicono *linearmente dipendenti.* ♢

Definizione 3.2.4 Un insieme X di vettori di V si dice *libero* se ogni suo sottoinsieme finito risulta linearmente indipendente; nel caso contrario si dice legato. Un sottoinsieme B di vettori di V si chiama *base* di V se é libero e massimale rispetto a questa proprietá. ♢

Osservazione 3.2.5 Le nozioni di insieme linearmente indipendente e di insieme libero coincidono solo nel caso degli insiemi finiti. ♢

Proposizione 3.2.6 *Siano B una base di V e $\mathbf{v} \in V$. Allora esiste un unico insieme finito $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ di vettori di B tale che*

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n\ ,\ a_j \in K \setminus \{0\}$$

e i coefficienti a_j sono univocamente determinati.

Dimostrazione. E' lasciata per esercizio al Lettore. $\diamondsuit$

Esempio 3.2.7 Nello spazio vettoriale R^n, l'insieme finito B costituito dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ ...,\ \mathbf{e}_n = (0, ..., 0, 1)$$

costituisce una base (la *base naturale* di R^n). $\diamondsuit$

Esempio 3.2.8 Nello spazio vettoriale $R[x]$ dei polinomi a coefficienti reali, l'insieme infinito

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$$

costituisce una base (la *base naturale* di $R[x]$) e non esistono basi finite. $\diamondsuit$

Definizione 3.2.9 Uno spazio vettoriale si dice di *dimensione finita* se possiede una base finita. Nel caso contrario si dice di *dimensione infinita.* $\diamondsuit$

Teorema 3.2.10 *Siano V uno spazio vettoriale su un campo K e X un sottoinsieme libero di V. Allora esiste una base di V contenente X.*

Dimostrazione. Sia $L(X)$ l'insieme delle parti libere di V contenenti X. $L(X)$ é non vuoto perché contiene X ed é un insieme ordinato rispetto alla relazione di inclusione.

Sia C un sottoinsieme di $L(X)$ totalmente ordinato e osserviamo che

$$M = \bigcup_{Y \in C} Y$$

é un sottoinsieme libero di V contenente X. Allora $M \in L(X)$ ed é un maggiorante di C.

Resta cosí provato che $L(X)$ é un insieme induttivo e quindi, per il lemma di Zorn, ammette un elemento massimale B.

B risulta un insieme libero e massimale fra tutti i sottoinsiemi liberi di V e contiene X. Allora B é una base di V e il nostro asserto é provato. $\diamondsuit$

Corollario 3.2.11 *Ogni spazio vettoriale su un campo ammette almeno una base.*

Osservazione 3.2.12 Nell'ipotesi che V sia finitamente generato, si puó costruire una base di V senza usare il lemma di Zorn. $\diamondsuit$

3.3 Relazioni d'equivalenza e insiemi quoziente

Sia S un insieme non vuoto.

Definizione 3.3.1 Una relazione $\Re$ su S si dice d'*equivalenza* se sono verificate le seguenti tre proprietá:

1. $a \Re a$, per ogni $a \in S$ *(proprietá riflessiva)*
2. $a, b \in S$, $a \Re b \Rightarrow b \Re a$ *(proprietá simmetrica)*
3. $a, b, c \in S$, $a \Re b \Re c \Rightarrow a \Re c$ *(proprietá transitiva).* $\diamondsuit$

Di solito una relazione d'equivalenza si denota con uno dei simboli $\sim$, $\simeq$, $\cong$, $\approx$, $\equiv$ e due elementi di S che sono in relazione si dicono *equivalenti.*

Esempio 3.3.2 Sia S l'insieme degli studenti presenti in un'aula. Le relazioni di *nascita nello stesso anno, residenza in uno stesso comune, avere lo stesso nome, avere lo stesso voto all'esame di maturitá* sono tutte relazioni d'equivalenza in S. $\diamondsuit$

Esempio 3.3.3 Sia S un insieme non vuoto. In $P(S)$ la relazione $X\Re Y$ se, e solo se, X e Y *sono equipotenti*[1] é d'equivalenza in $P(S)$. $\diamondsuit$

Esercizio 3.3.4 *Sia n un intero. Provare che la relazione su Z definita da*

$$a\Re_n b \;\; \Leftrightarrow \;\; a - b = hn, \;\; \textit{per qualche intero } h \in Z$$

é d'equivalenza.

Sia $\Re$ una relazione d'equivalenza su un insieme S.

Definizione 3.3.5 Per ogni elemento $a \in S$, si chiama *classe d'equivalenza* di a rispetto a $\Re$ l'insieme di tutti gli elementi di S che sono nella relazione $\Re$ con a. La classe d'equivalenza dell'elemento a si denota con $\Re[a]$, o con $[a]_\Re$, o semplicemente con $[a]$ se non vi é possibilitá di equivoci. $\diamondsuit$

Le classi d'equivalenza degli elementi di S verificano le seguenti proprietá:

- $a \in [a]$;
- $a \in [b] \;\; \Leftrightarrow \;\; b \in [a]$;
- $a \sim b \;\; \Leftrightarrow \;\; [a] = [b]$;
- $[a] \subseteq [b] \;\; \Leftrightarrow \;\; [a] = [b]$;
- $a \not\sim b \;\; \Leftrightarrow \;\; [a] \cap [b] = \emptyset$;
- l'unione di tutte le classi d'equivalenza é uguale ad S;
- le classi d'equivalenza formano una partizione di S.

Definizione 3.3.6 L'insieme i cui elementi sono le classi d'equivalenza di S rispetto ad $\Re$ si chiama *insieme quoziente di S rispetto ad* $\Re$ e si denota con $S/\Re$. L'applicazione suriettiva

$$\pi : \; a \in S \; \rightarrow \; [a] \in S/\Re$$

prende il nome di *applicazione* (o *proiezione*) *canonica* di S su $S/\Re$. $\diamondsuit$

Osservazione 3.3.7 L'insieme quoziente $S/\Re$ é un sottoinsieme di $P(S)$. $\diamondsuit$

[1] Due insiemi X, Y si dicono *equipotenti* se esiste una funzione biunivoca tra X e Y, e quindi una tra Y e X. Due insiemi finiti sono equipotenti se, e solo se, hanno lo stesso numero di elementi.

Esercizio 3.3.8 *Sia $\Re$ una relazione d'equivalenza su un insieme con un numero finito n di elementi. Si supponga che le classi d'equivalenza di $\Re$ contengano tutte lo stesso numero di elementi m. Provare che m é un divisore di n.*

Esercizio 3.3.9 *Sull'insieme $S = Z \times Z^*$ si consideri la seguente relazione $\Re$:*

$$(a, b)\,\Re\,(c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$$

Provare che $\Re$ é una relazione d'equivalenza su S e che l'insieme quoziente $S/\Re$ é equipotente all'insieme Q dei numeri razionali.

3.4 Alcune osservazioni sulle funzioni

Definizione 3.4.1 Siano S, T, U insiemi e $f : S \to T$, $g : S \to U$, $h : U \to T$ tre funzioni. Se accade che $f = gh$, si dice che il diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \\ & U \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

é *commutativo.* ♢

Sia $f : S \to T$ un'applicazione tra due insiemi S, T e denotiamo con $\Re_f$ la relazione in S definita da

$$a, b \in S \ , \ a\Re_f b \ \Leftrightarrow \ f(a) = f(b).$$

Proposizione 3.4.2 *La relazione $\Re_f$ é d'equivalenza in S.*

Dimostrazione. E' lasciata per esercizio al Lettore. ♢

Esercizio 3.4.3 *Sia $\Re$ una relazione d'equivalenza su un insieme non vuoto S. Provare che esiste una funzione $f : S \to S$ tale che $\Re = \Re_f$.*

Teorema 3.4.4 *Denotata con π la proiezione canonica di S su $S/\Re_f$, esiste un'unica applicazione iniettiva $\varphi : S/\Re_f \to T$ per cui é commutativo il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \\ & S/\Re_f \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Osserviamo che per definizione abbiamo:

$$a\Re_f b \ \Rightarrow \ f(a) = f(b).$$

Ne segue che é *ben definita*[2] la seguente applicazione:

$$\varphi\colon [a]_{\Re_f} \in S/\Re_f \ \to \ f(a) \in T.$$

L'applicazione φ verifica la proprietá $f = \pi\varphi$ ed é iniettiva.

Sia ora $g\colon S/\Re_f \to T$ un'applicazione tale che $f = \pi g$. Per ogni $a \in S$ abbiamo

$$g([a]_{\Re_f}) = g(\pi(a)) = f(a) = \varphi([a]_{\Re_f}),$$

e cioé $g = \varphi$. ♢

Corollario 3.4.5 *Gli insiemi $S/\Re_f$ e $f(S)$ sono equipotenti.*

Figura 3.6: Un esempio di funzione

[2]Questo significa che l'immagine della classe $[a]_{\Re_f}$ non dipende dalla scelta dell'elemento a nella classe stessa.

Esempio 3.4.6 Siano $S = \{6, 8, 9, 11, 12, 15, 17, 18\}$, $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ed f la funzione che ad ogni elemento $a \in S$ associa il resto della divisione tra a e 6, che é un elemento di T. Allora risulta

$$S/\Re_f = \{\{6, 12, 18\}, \{8\}, \{9, 15\}, \{11, 17\}\} \;\text{ e }\; f(S) = \{0, 2, 3, 5\}$$

e il risultato del precedente teorema puó visualizzarsi nella figura 3.6. $\diamondsuit$

Esercizio 3.4.7 *Siano n, k interi positivi, con $n \geq k$, e A, B due insiemi finiti d'ordine rispettivamente n e k. Provare che il numero delle funzioni suriettive di A su B é*

$$k!\, S(n, k)\,,$$

ove $S(n, k)$ denota il numero di Stirling di secondo tipo di indici n e k.

3.5 Esercizi

3.5.1 Dire quali dei seguenti insiemi é limitato inferiormente e, in caso di risposta affermativa, calcolare l'estremo inferiore.

$$A = \{n \in Z \;:\; n^2 \leq 36\}\,,\; B = \{n \in Z \;:\; n = 3a\,,\; a \in Z\}\,,\; C = \{n \in Z \;:\; n^2 \leq 50n\}\,.$$

3.5.2 Disegnare il diagramma di Hasse dell'algebra di Boole $(P(S), \subseteq)$ dei sottoinsiemi di un insieme S con 4 elementi e verificare che il duale $(P(S), \subseteq)$ ha lo stesso diagramma. Si puó generalizzare questa proprietá?

3.5.3 Sia $S = \{(x, y) \in R^2\}$, ove R denota il campo dei numeri reali. Sia $\Re$ la relazione in S definita da

$$(x, y)\Re(z, t) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = z^2 + t^2.$$

Provare che $\Re$ é d'equivalenza in S e dare una descrizione geometrica delle sue classi d'equivalenza.

3.5.4 Sull'insieme R dei numeri reali si definisca la seguente relazione:

$$a\Re b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \;\text{ é un intero.}$$

Provare che $\Re$ é d'equivalenza e descriverne le relative classi d'equivalenza.

3.5.5 Provare che la relazione di similitudine sull'insieme di tutti i triangoli del piano é d'equivalenza.

3.5.6 Sia V^* l'insieme dei vettori non nulli di uno spazio vettoriale V su un campo. Provare che la relazione

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}\,, \mathbf{v} \;\text{ appartengono ad uno stesso sottospazio di dimensione 1}$$

é d'equivalenza in V^* e descrivere il corrispondente insieme quoziente.