

sottogruppi normali

Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo.

PROPOSIZIONE 1 I laterali sinistri e destri del sottogruppo H di G verificano le seguenti proprietà:

$$x, y, a \in G, xH = yH \Rightarrow (ax)H = (ay)H; \quad (1)$$

$$x, y, a \in G, Hx = Hy \Rightarrow H(xa) = H(ya); \quad (2)$$

DIM. Per i laterali sinistri di H abbiamo:

$$xH = yH \Rightarrow x \equiv y \pmod{\mathfrak{R}'_H}, a \in G \Rightarrow x^{-1}y \in H, a \in G$$

$$\Rightarrow x^{-1}y = x^{-1}a^{-1}ay = (ax)^{-1}(ay) \in H$$

$$\Rightarrow ax \equiv ay \pmod{\mathfrak{R}'_H} \Rightarrow (ax)H = (ay)H.$$

In modo analogo si ragiona per i laterali destri.

DEFINIZIONE 2 Si dice che H é un sottogruppo *normale* di G , o che H é *normale* in G , se risulta $\mathfrak{R}'_H = \mathfrak{R}''_H$, cioè se

$$aH = Ha, \quad \text{per ogni } a \in G.$$

Per indicare che H é un sottogruppo normale di G si usa la notazione $H \triangleleft G$. Per un sottogruppo normale H non c'è differenza tra laterali sinistri e destri; per tale motivo, si parla semplicemente di *laterali* e si pone $\mathfrak{R}_H = \mathfrak{R}'_H = \mathfrak{R}''_H$. Nell'ipotesi che H sia normale in G l'insieme quoziente G/\mathfrak{R}_H si denota più semplicemente con G/H .

OSSERVAZIONE 3 $\{1\}$ e G sono sottogruppi normali in G .

PROPOSIZIONE 4 Sia $H \triangleleft G$. Allora valgono le seguenti proprietà:

$$x, y, a, b \in G, xH = aH, yH = bH \Rightarrow (xy)H = (ab)H; \quad (3)$$

$$x, y, a, b \in G, xH = aH, yH = bH \Rightarrow H(xy) = H(ab); \quad (4)$$

sottogruppi normali

DEFINIZIONE 5 Sia $H \triangleleft G$. Nell'insieme G/H dei laterali sinistri di H in G é ben definita l'operazione

$$(aH)(bH) = (ab)H, \quad \text{per ogni } aH, bH \in G/H$$

e la struttura algebrica $(G/\mathfrak{R}_H, \cdot)$ risulta un gruppo, che si chiama *gruppo quoziente* di G rispetto ad H e si denota con G/H .

ESERCIZIO 6 Provare che in un gruppo quoziente G/H risulta

$$1 = H \quad \text{e} \quad (aH)^{-1} = (a^{-1})H, \quad \text{per ogni } aH \in G/H.$$

OSSERVAZIONI 7 Valgono le seguenti proprietá:

- $G/\{1\} = G$ e $G/G = \{1\}$ (*quozienti banali*).
- $H \leq Z(G) \Rightarrow H \triangleleft G$ (in particolare $Z(G)$ é normale in G).
- Se G é abeliano, ogni suo sottogruppo é normale.
- $|G : H| = 2 \Rightarrow H$ é normale in G .
- $H \triangleleft G \Rightarrow H$ permutabile con ogni $K \leq G$.
- $H \triangleleft G, K \leq G \Rightarrow \langle H, K \rangle = HK$.

ESEMPIO 8 (quozienti di $(Z_n, +)$) Consideriamo il gruppo additivo $(Z_n, +)$ degli interi modulo n e, detto m un divisore positivo di n , sia $n = mk$. Allora $(Z_n, +)$ possiede un unico sottogruppo d'ordine m dato da

$$Z_m = \{0, k, 2k, \dots, (m-1)k\}.$$

Ne segue che il gruppo quoziente $\frac{Z_n}{Z_m}$ é dato da

$$\frac{Z_n}{Z_m} = \{Z_m, 1 + Z_m, 2 + Z_m, \dots, (k-1) + Z_m\}$$

ed é evidentemente isomorfo a $(Z_k, +)$.

sottogruppi normali

ESERCIZIO 9 Il gruppo alterno A_4 , che ha ordine 12, non possiede sottogruppi d'ordine 6.

SOLUZIONE Un eventuale sottogruppo H di A_4 d'ordine 6 avrebbe indice 2 in A_4 e, quindi, sarebbe normale. Allora nel gruppo quoziente $G/H = \{H, \sigma H\}$, con $\sigma \in G \setminus H$, avremmo $H^2 = H$ e $(\sigma H)^2 = (\sigma^2)H = H$, cioè

$$\tau \in A_4 \Rightarrow \tau^2 \in H.$$

Questo significa che H dovrebbe contenere i quadrati di tutti gli elementi di A_4 e ciò é assurdo perché H ha ordine 6 e in A_4 ci sono piú di 6 elementi quadrati avendosi:

$$(1, 3, 2)^2 = (1, 2, 3), \quad (1, 2, 3)^2 = (1, 3, 2),$$

$$(1, 2, 4)^2 = (1, 4, 2), \quad (1, 4, 2)^2 = (1, 2, 4),$$

$$(1, 3, 4)^2 = (1, 4, 3), \quad (1, 4, 3)^2 = (1, 3, 4),$$

$$(2, 3, 4)^2 = (2, 4, 3), \quad (2, 4, 3)^2 = (2, 3, 4).$$

DEFINIZIONE 10 Un gruppo G si dice *semplice* se i due sottogruppi banali $\{1\}$ e G sono i suoi soli sottogruppi normali.

ESERCIZIO 11 Provare che il gruppo alterno A_n ha indice 2 nel gruppo simmetrico S_n e quindi A_n é normale in S_n . Descrivere il gruppo quoziente S_n/A_n .

ESERCIZIO 12 Provare che il gruppo H delle rotazioni di un poligono regolare P_n ha indice 2 nel gruppo diedrale D_n e quindi é normale in S_n . Descrivere il gruppo quoziente D_n/H .

ESERCIZIO 13 Verificare se il sottogruppo ciclico di D_n generato da una riflessione é normale in D_n .

sottogruppi normali

ESERCIZIO 14 Siano H un sottogruppo normale di G e K un sottogruppo di G contenente H . Provare che H é normale in K .

PROPOSIZIONE 15 Per un sottogruppo H di un gruppo G sono equivalenti le seguenti condizioni:

- (a) H é normale in G ;
- (b) $a^{-1}Ha = H$, per ogni $a \in G$;
- (c) $a^{-1}Ha \subseteq H$, per ogni $a \in G$;
- (d) per ogni $a \in G$ e $h \in H$, esiste $h' \in H$ tale che $ah = h'a$.

OSSERVAZIONE 16 Se H é un sottogruppo normale di un gruppo G e se K é un sottogruppo normale di H , il sottogruppo K non é in generale normale in G , come prova l'esercizio che segue.

ESERCIZIO 17 Siano

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in R^* \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R^* \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in R^* \right\}.$$

Provare che $A = H \cup K$ é un sottogruppo di $GL(2, R)$, che H é un sottogruppo normale di A e che T é un sottogruppo normale di H . Provare inoltre che, posto

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

risulta

$$y^{-1}xy \notin T$$

e dedurre che T , come sottogruppo, non é normale in A .

morfismi di gruppi

Siano G e G' due gruppi. Ricordiamo che, per un omomorfismo $f : G \rightarrow G'$ e per ogni $a, b \in G$, risulta

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad .$$

e valgono le seguenti proprietà:

$$f(1) = 1 \quad , \quad f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \quad , \quad f(a^n) = f(a)^n.$$

DEFINIZIONE 18 Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo. L'insieme

$$\text{Ker} f = \{a \in G : f(a) = 1\}$$

prende il nome di *nucleo* dell'omomorfismo f .

PROPOSIZIONE 19 Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo. Allora il nucleo $H = \text{Ker} f$ di f è un sottogruppo normale di G .

DIM.

$$\bullet a, b \in H \Rightarrow f(a) = f(b) = 1, f(a)^{-1} = 1 = f(a^{-1}) \Rightarrow f(a^{-1}b) = f(a^{-1})f(b) = 1 \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow H \leq G.$$

$$\bullet a \in G, b \in H \Rightarrow f(a^{-1}ba) = f(a^{-1})f(b)f(a) = f(a)^{-1}f(a) = 1 \Rightarrow a^{-1}ba \in H \Rightarrow a^{-1}Ha \subseteq H.$$

ESERCIZIO 20 Provare che un omomorfismo f fra due gruppi è un monomorfismo se, e solo se, $\text{Ker} f = \{1\}$.

ESERCIZIO 21 Sia K un campo. Provare che $SL(n, K)$ è normale in $GL(n, K)$.

ESERCIZIO 22 Provare che $SO(n)$ è normale in $O(n)$.

morfismi di gruppi

ESERCIZIO 23 Sia f un omomorfismo di G in G' . Provare le seguenti proprietà:

- $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$.
- $H = \langle a \rangle$ sottogruppo ciclico di $G \Rightarrow f(H)$ sottogruppo ciclico di G' generato da $f(a)$.
- H sottogruppo abeliano di $G \Rightarrow f(H)$ sottogruppo abeliano di G' .
- H sottogruppo normale di $G \Rightarrow f(H)$ sottogruppo normale di $f(G')$.

ESERCIZIO 24 Provare che S_3 e un gruppo ciclico d'ordine 6 non sono isomorfi.

ESERCIZIO 25 Provare che D_4 non é isomorfo a Q_2 .

Il teorema di omomorfismo

OSSERVAZIONE 26 Se H é un sottogruppo normale di un gruppo G , allora la proiezione canonica

$$\pi : a \in G \rightarrow aH \in G/H$$

é un epimorfismo, l'*epimorfismo canonico*.

TEOREMA 27 (teorema di omomorfismo) Sia $f : G_1 \rightarrow G_2$ un omomorfismo fra due gruppi. Allora esiste un unico omomorfismo

$$\varphi : G_1/\text{Ker} f \rightarrow G_2$$

per cui é commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \\ \pi \searrow & & \nearrow \varphi \\ & G_1/\text{Ker} f & \end{array}$$

L'omomorfismo φ é un monomorfismo e i gruppi $G_1/\text{Ker} f$ e $f(G_1)$ sono isomorfi.

OSSERVAZIONE 28 Con riferimento al teorema precedente, il fatto che i gruppi $G_1/\text{Ker} f$ e $f(G_1)$ sono isomorfi é noto anche come *primo teorema di isomorfismo* (dei gruppi).

ESERCIZIO 29 Sia f un omomorfismo fra i gruppi G e G' . Provare le seguenti proprietá:

- $a \in G$ e $|a| = n \Rightarrow |f(a)|$ divide n .
- H sottogruppo di G con $|H| = n \Rightarrow |f(H)|$ divide n .

ESERCIZIO 30 Siano G un gruppo, H un suo sottogruppo normale e $a \in G$ un elemento di periodo finito n in G . Provare che aH , come elemento di G/H , ha periodo finito divisore di n .