campo dei quozienti di un dominio d'integritá

Sia D un dominio d'integritá.

DEFINIZIONE 1 La relazione $\sim$ su $D \times D^*$ definita da

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

risulta d'equivalenza ed il relativo insieme quoziente si denota con $Q(D)$. La classe d'equivalenza $[(a,b)]$ di una coppia (a,b), che si denota con

$$\frac{a}{b} \quad \text{o con} \quad a/b,$$

si chiama *frazione di numeratore* a *e denominatore* b.

Le seguenti proprietá sono di facile verifica:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$;
- $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, per ogni elemento $c \in D^*$;
- $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \quad \Rightarrow \quad \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$;
- $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$.

Risultano, pertanto, ben definite in $Q(D)$ le seguenti operazioni di addizione e moltiplicazione:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

La struttura $(Q(D), +)$ é un gruppo abeliano additivo nel quale lo zero é dato dalla frazione $\frac{0}{d}$, con $d \in D^*$, e l'opposto di un elemento $\frac{a}{b}$ é $\frac{-a}{b}$. La moltiplicazione é associativa, commutativa, distributiva rispetto all'addizione ed eredita dalla moltiplicazione di D anche la validitá della legge di annullamento del prodotto, cioé

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = 0 \text{ o } \frac{c}{d} = 0.$$

campo dei quozienti di un dominio d'integritá

La struttura $(Q(D)^*, \cdot)$ é un gruppo abeliano moltiplicativo nel quale l'unitá é data dalla frazione $\frac{a}{a}$, con $a \in D \setminus \{0\}$, e l'inverso di un elemento non nullo $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$.

TEOREMA **2** *La struttura algebrica $(Q(D), +, \cdot)$ é un campo.*

DEFINIZIONE **3** Il campo $(Q(D), +, \cdot)$ prende il nome di *campo dei quozienti* del dominio d'integritá D e sará denotato semplicemente con $Q(D)$.

OSSERVAZIONE **4** *Il campo $(Q(Z), +, \cdot)$ dei quozienti di Z é il campo Q dei razionali.*

Fissato un elemento $b \in D^*$, definiamo l'applicazione

$$i \ : \ a \in D \ \ \rightarrow \ \ \frac{ab}{b} \in Q(D)$$

che non dipende dalla scelta di b in D^* perché é

$$\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c},$$

per ogni $c \in D^*$. Inoltre, risultando

$$i(x+y) = \frac{(x+y)b}{b} = \frac{xb+yb}{b} = \frac{xb+yb}{b}\frac{b}{b}$$

$$= \frac{xb^2+byb}{b^2} = \frac{xb}{b} + \frac{yb}{b} = i(x) + i(y),$$

$$i(xy) = \frac{xyb}{b} = \frac{xyb}{b}\frac{b}{b} = \frac{xbyb}{b^2} = \frac{xb}{b}\frac{yb}{b} = i(x)i(y),$$

la funzione i é un omomorfismo con nucleo nullo

$$Ker\, i = \{a \in D \ : \ \frac{ab}{b} = 0\} = \{0\}.$$

Ne segue che i é un monomorfismo canonico, nel senso che é indipendente dalla scelta dell'elemento b in D^*, e quindi

$$D \sim i(D) = \left\{ \frac{ab}{b} \; : \; a \in D \right\} \subseteq Q(D).$$

Abbiamo cosí che $Q(D)$ contiene il sottoanello $i(D)$ canonicamente isomorfo ad D.

Nel seguito, con abuso di linguaggio e di notazione, identificheremo D e $i(D)$, cioé penseremo D come sottoanello di $Q(D)$, e scriveremo $a = i(a)$, per ogni $a \in D$. Con questa notazione, per ogni $\frac{x}{y} \in Q(D)^*$, abbiamo

$$\frac{x}{y} = \frac{xb}{b}\frac{b}{yb} = \frac{xb}{b}\left(\frac{yb}{b}\right)^{-1} = i(x)i(y)^{-1} = xy^{-1}$$

e cosí possiamo scrivere

$$Q(D) = \{ab^{-1} \quad : \quad a, b \in D \; , b \neq 0\}.$$

ESERCIZIO 5 *Provare che l'unitá di $Q(D)$ appartiene a $i(D)$ se, e solo se, D é unitario.*

ESEMPIO 6 $Z[x]$ é un dominio d'integritá e quindi possiamo considerare il suo campo dei quozienti

$$Q(Z[x]) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \quad : \quad f, g \in Z[x] \; , f \neq 0 \right\}.$$

Gli elementi di $Q(Z[x])$ si chiamano *funzioni razionali* su Z.

ESEMPIO 7 Se F é un campo, il campo dei quozienti di $F[x]$ si denota con $F(x)$. Gli elementi di $F(x)$ si chiamano *funzioni razionali* su F.

campo dei quozienti di un dominio d'integritá

ESERCIZIO 8 *Siano D_1, D_2 domini d'integritá isomorfi e $f : D_1 \to D_2$ un isomorfismo. Provare che l'applicazione*

$$\varphi \; : \; \frac{a}{b} \in Q(D_1) \;\; \to \;\; \frac{f(a)}{f(b)} \in Q(D_2)$$

é ben definita e risulta un isomorfismo fra $Q(D_1)$ e $Q(D_2)$.

ESERCIZIO 9 *Provare che il campo dei quozienti del dominio d'integritá $(2Z, +, \cdot)$ é isomorfo al campo razionale.*

OSSERVAZIONE 10 Due domini d'integritá non isomorfi possono avere campi dei quozienti isomorfi. Abbiamo, infatti, visto che $(Z, +, \cdot)$ e $(2Z, +, \cdot)$, che non sono isomorfi, hanno entrambi campo dei quozienti isomorfo al campo razionale.

PROPOSIZIONE 11 *Siano K un corpo e A un sottoanello commutativo di K. Allora A é un dominio d'integritá, l'insieme*

$$F = \{ab^{-1} \quad : \quad a, b \in A \; , \; b \neq 0\}$$

é un sottocampo di K isomorfo a $Q(A)$ e coincide col sottocampo di K generato da A. In particolare, se A é un campo, abbiamo $F = A$ e, quindi, ogni campo é isomorfo al proprio campo dei quozienti.

DIM. L'applicazione

$$f \; : \; \frac{a}{b} \in Q(A) \; \to \; ab^{-1} \in K$$

é un monomorfismo di anelli e risulta $f(Q(A)) = F$. Ne segue che $Q(A)$ ed F sono isomorfi, cioé l'asserto.