# anelli di polinomi

**TEOREMA 1** *Sia $K$ un campo. Allora tutti gli ideali di $K[x]$ sono principali. Ne segue che $K[x]$ é un anello principale.*

**DIM.** Sia $I$ un ideale non nullo di $K[x]$ e sia $g$ un polinomio di grado minimo in $I$. Se $g$ é una costante, risulta $I = K[x] = (g)$ e quindi possiamo supporre $deg(g) > 0$. Ovviamente, abbiamo

$$(g) \subseteq I.$$

D'altra parte, se $f \in I$, possiamo scrivere

$$f = gq + r \ , \quad \text{con } deg(r) < deg(g) \text{ o } r = 0 \text{ e } gq \in I.$$

Ne segue che

$$f - gq = r \in I,$$

e, essendo $g$ di grado minimo in $I$, deve essere $r = 0$. Otteniamo cosí $f = gq \in (g)$, cioé

$$I \subseteq (g),$$

che é il nostro asserto.

**COROLLARIO 2** *Siano $K$ un campo, $I$ un ideale non banale di $K[x]$ e $g$ un elemento di $I$. Allora risulta $I = (g)$ se, e soltanto se, $g$ é un polinomio non nullo di grado minimo in $I$. Inoltre, i generatori di $I = (g)$ sono tutti e soli i polinomi del tipo $kg$, al variare di $k$ in $K^*$.*

**DEFINIZIONE 3** Il corollario precedente garantisce che, se $K$ é un campo e $I$ un ideale non banale di $K[x]$, allora esiste un unico polinomio monico che genera $I$. Tale polinomio si chiama *polinomio minimo* di $I$.

**ESERCIZIO 4** *Siano $A$ e $B$ anelli commutativi unitari isomorfi. Provare che $A[x]$ e $B[x]$ sono isomorfi.*

**ESERCIZIO 5** *Sia $A$ un anello commutativo unitario. Provare che $A[x]$ ha la stessa caratteristica di $A$.*

**ESERCIZIO 6** *Provare che in $Z[x]$ i polinomi del tipo*

$$2a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

*costituiscono un ideale.*

**ESERCIZIO 7** *Provare che in $Z[x]$ l'ideale $(x)$ generato da $x$ é primo ma non massimale.*

**ESERCIZIO 8** *Provare che in $Q[x]$ l'ideale $(x)$ generato da $x$ é primo e massimale.*

**ESERCIZIO 9** *Sia $K$ un campo e si consideri l'insieme $I$ di polinomi a coefficienti in $K$ definito da*

$$I = \{a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n \ : \ a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0\}.$$

*Provare che $I$ é un ideale di $K[x]$ e trovare un generatore di $I$.*

**OSSERVAZIONE 10** Sia $A$ un anello commutativo unitario. Possiamo considerare l'anello $A[x][y]$ dei polinomi nell'indeterminata $y$ a coefficienti in $A[x]$ e, analogamente, $A[y][x]$. Si prova senza difficoltá che la funzione

$$\varphi \ : \ \sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^i \in A[x][y] \ \rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} a_i(y)x^i \in A[y][x]$$

é l'unico isomorfismo di $A[x][y]$ su $A[y][x]$ tale che

$$\varphi(a(x)) = a(y) \ \text{ per ogni } \ a(x) \in A[x] \ \text{ e } \ \varphi(x) = y\,, \ \ \varphi(y) = x.$$

Gli anelli $A[x][y]$ e $A[y][x]$ possono dunque identificarsi mediante l'isomorfismo $\varphi$ e, per tale motivo, si pone $A[x, y] := A[x][y]$. Tale anello si chiama *anello dei polinomi nelle indeterminate $x, y$ a coefficienti in $A$* e un suo elemento generico puó scriversi nella forma

$$\sum_{0 \leq i+j \leq m} a_{ij}x^iy^j,$$

con $a_{ij} \in A$ ed $m \in N_o$.

## anelli di polinomi

**DEFINIZIONE 11** Siano $A$ un anello commutativo unitario ed $n > 1$ un intero. Si chiama *anello dei polinomi nelle indeterminate* $x_1, x_2, ..., x_n$ *a coefficienti in* $A$, e si denota con

$$A[x_1, x_2, ..., x_n],$$

l'anello definito per induzione da

$$A[x_1, x_2, ..., x_n] = A[x_1, x_2, ..., x_{n-1}][x_n].$$

Un elemento generico di tale anello é del tipo

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{0 \leq j_1 + j_2 + \cdots + j_n \leq m} a_{j_1 j_2 \ldots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}, \qquad (1)$$

con $a_{j_1 j_2 \ldots j_n} \in A$ ed $m \in N_o$. I polinomi del tipo

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$$

si chiamano *monomi* e, se $a_{j_1 j_2 \ldots j_n} \neq 0$, l'intero $j_1 + j_2 + \cdots + j_n$ si dice *grado* del monomio. Il grado massimo dei monomi che compaiono nell'espressione (1) si chiama *grado* del polinomio $f(x_1, x_2, ..., x_n)^*$ e si denota con $deg(f)$.

**ESERCIZIO 12** *Sia $A$ un dominio di integritá unitario. Provare che $A[x_1, x_2, ..., x_n]$ é un dominio di integritá e che*

$$f, g \in A[x_1, x_2, ..., x_n]\,,\ fg \neq 0 \ \Rightarrow\ deg(fg) = deg(f) + deg(g).$$

*Si osservi che, a differenza di quanto accade per i polinomi in una sola indeterminata, puó accadere che nella (1) vi sia piú di un monomio di grado massimo.