

sottoanelli di un anello

DEFINIZIONE 1 Un sottoinsieme H di un anello A si chiama *sottoanello* se é una parte stabile e se é un anello rispetto alle operazioni indotte in esso da A . Un sottoanello che risulti un corpo (risp. campo) si chiama *sottocorpo* (risp. *sottocampo*).

Prime proprietà e definizioni relative ai sottoanelli

- Ogni anello A possiede due sottoanelli *banali*: $\{0\}$ (*sottoanello nullo*) e A . Un sottoanello diverso da A si dice *proprio*.
- H sottoanello di $A \Leftrightarrow a - b \in H$ e $ab \in H$, per ogni $a, b \in H$.
- L'unione di due sottoanelli non é in generale un sottoanello. L'intersezione di una famiglia di sottoanelli é un sottoanello.
- Il *sottoanello generato* da un sottoinsieme X di A é, per definizione, l'intersezione di tutti i sottoanelli di A che contengono X .
- Un sottoanello H di A é il sottoanello generato da un sottoinsieme X di A se, e solo se, sono verificate le due seguenti proprietà:
 - (1) H é un sottoanello di A contenente X ,
 - (2) ogni sottoanello K di A contenente X contiene H .
- Un elemento $a \in A$ si dice *centrale* se é tale rispetto al prodotto. L'insieme $Z(A)$ degli elementi centrali di A si chiama *centro di A* ed é un sottoanello di A .

OSSERVAZIONE 2 Un sottoanello di un anello unitario può non essere unitario. Un sottoanello unitario di un anello unitario A può avere unità diversa da quella di A .

sottoanelli di un anello

ESEMPI 3

- Z é sottoanello di Q .
- $2Z$ é un sottoanello non unitario dell'anello unitario Z .
- $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in R \right\}$ é sottoanello unitario di $M_2(R)$ con unitá $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ESERCIZIO 4 Siano A_1 e A_2 due anelli e $f: A_1 \rightarrow A_2$ un monomorfismo. Provare che $f(A_1)$ é un sottoanello di A_2 isomorfo a A_1 .

ESERCIZIO 5 Sia A un anello. Provare che l'intersezione di una famiglia di sottocampi (resp. sottocorpi) di A é un sottocampo (resp. sottocorpo) di A . Nel caso A sia un campo e X un insieme di suoi elementi, definire il sottocampo di A generato da X .

DEFINIZIONE 6 Un sottoanello H di A prende il nome di *ideale sinistro* (resp. *destro*) se

$$ah \in H \quad (\text{resp. } ha \in H) \quad , \quad \text{per ogni } a \in A \quad , \quad h \in H.$$

Un ideale che sia sinistro e destro si dice *bilatero*.

OSSERVAZIONE 7 Un sottoanello di un anello non é necessariamente un ideale. Per esempio, Z é un sottoanello di Q che non é un ideale.

OSSERVAZIONE 8 Gli insiemi $\{0\}$ e A sono ideali bilateri dell'anello A e sono detti *ideali banali* di A . Un ideale di A diverso da A si dice *proprio*. Se A é commutativo, tutti i suoi ideali sono bilateri.

ideali di un anello

ESERCIZIO 9 Provare che nell'anello $M_2(\mathbb{Z})$ l'insieme

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

é un ideale sinistro ma non é un ideale destro.

ESEMPIO 10 Sia a un numero reale. L'insieme

$$I = \{f(x) \in R[x] : f(a) = 0\}$$

é un ideale di $R[x]$.

Prime proprietà e definizioni relative agli ideali

- H ideale sinistro di $A \Leftrightarrow a - b \in H$ per ogni $a, b \in H$ e $ah \in H$ per ogni $a \in A, h \in H$.
- L'intersezione di una famiglia di ideali sinistri é un ideale sinistro.
- L'ideale sinistro generato da un sottoinsieme X di A é, per definizione, l'intersezione di tutti gli ideali sinistri di A che contengono X .
- Un ideale sinistro H di A é l'ideale sinistro generato da un sottoinsieme X di A se, e solo se, sono verificate le due seguenti proprietà:
 - (1) H é un ideale sinistro di A contenente X ,
 - (2) ogni ideale sinistro K di A contenente X contiene H .

ideali di un anello

- Se H, K sono ideali sinistri di A , risulta

$$(H \cup K)_s = \{h + k \quad : \quad h \in H \quad , \quad k \in K\}. \quad (1)$$

Tale ideale si denota con $H + K$ e si chiama *somma* degli ideali H e K .

- Se A é unitario ed un suo ideale sinistro H contiene 1, allora risulta $H = A$.

- Se A é unitario ed un suo ideale sinistro H contiene un elemento invertibile, allora risulta $H = A$.

- Se $x \in A$, risulta

$$(x)_s = \{ax + nx \quad : \quad a \in A \quad , \quad n \in \mathbb{Z}\}; \quad (2)$$

se A é unitario risulta

$$(x)_s = \{ax \quad : \quad a \in A\}. \quad (3)$$

PROPOSIZIONE 11 *Un anello unitario non nullo A é un corpo se, e soltanto se, i suoi unici ideali sinistri (destri) sono quelli banali.*

DIM. Se A é un corpo, un suo ideale sinistro non nullo contiene elementi invertibili e, quindi, coincide con A . Supponiamo ora che A non possenga ideali sinistri non banali e sia x un suo elemento diverso da zero. Allora abbiamo $(x) = A$ e, di conseguenza, l'unitá 1 di A appartiene ad (x) . Ne segue, in forza della (3), che esiste in A un elemento $a \neq 0$ tale che $ax = 1$. Analogamente, avendosi $(a) = A$, esiste in A un elemento $b \neq 0$, tale che $ba = 1$ e risulta:

$$xa = 1xa = (ba)(xa) = b(ax)a = ba = 1.$$

Abbiamo cosí che $a = x^{-1}$ e l'asserto é provato.