

## Il gruppo alterno $A_n$

Sia  $S_n$  il gruppo simmetrico su  $n$  oggetti, cioè il gruppo di tutte le permutazioni sull'insieme  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . I cicli di lunghezza 2 prendono il nome di *trasposizioni* ed è chiaro che, per ogni trasposizione  $\sigma$ , risulta  $\sigma = \sigma^{-1}$ . Ogni trasposizione ha dunque periodo due in  $S_n$ .

Osserviamo che ogni ciclo, e quindi ogni permutazione, può scriversi come prodotto di trasposizioni; infatti si ha

$$(j_1, j_2, \dots, j_k) = (j_1, j_2)(j_1, j_3) \cdots (j_1, j_{k-1})(j_1, j_k).$$

Una permutazione  $\sigma$  può in generale fattorizzarsi in modi diversi mediante trasposizioni, nel senso che le trasposizioni di una sua fattorizzazione e il loro numero non sono degli invarianti di  $\sigma$ ; in altre parole possiamo dire che per le trasposizioni non vale un teorema analogo a quello dimostrato per la decomposizione di una permutazione in cicli.

**DEFINIZIONE 1** Allo scopo di trovare un invariante delle possibili fattorizzazioni di una permutazione in trasposizioni diamo le seguenti definizioni per una permutazione  $\sigma$  :

- Considerata una coppia  $(i, j)$ , ove  $i, j$  sono elementi di  $N_n$  con  $i < j$ , si dice che  $\sigma$  presenta un'*inversione* su  $(i, j)$  se risulta  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .
- Si dice che  $\sigma$  è una permutazione *pari* se presenta un numero pari di inversioni, *dispari* nel caso contrario.
- si definisce *segno* di  $\sigma$ , e si denota con  $\text{sgn}(\sigma)$ , l'intero 1 o  $-1$  a seconda che  $\sigma$  sia rispettivamente pari o dispari.

**ESEMPIO 2** Ogni trasposizione è una permutazione dispari e il suo segno è  $-1$ . La permutazione identica è ovviamente pari.

## Il gruppo alterno $A_n$

Per ogni permutazione  $\sigma$  risulta

$$\prod_{\{i,j\} \subseteq N_n} \frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} = \prod_{i < j} \frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} = \text{sgn}(\sigma)$$

e, per ogni due permutazioni  $\sigma$  e  $\tau$ , risulta

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma\tau) &= \prod_{i < j} \frac{i-j}{(\sigma\tau)(i) - (\sigma\tau)(j)} = \\ &= \left( \prod_{i < j} \frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} \right) \left( \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))} \right) = \\ &= \left( \prod_{i < j} \frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} \right) \left( \prod_{\sigma(i) < \sigma(j)} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))} \right) = \\ &= \left( \prod_{i < j} \frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} \right) \left( \prod_{i < j} \frac{i-j}{\tau(i) - \tau(j)} \right) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau). \end{aligned}$$

Resta dunque provata la seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 3** *Il prodotto di due permutazioni dello stesso segno é pari e quello di segno diverso é dispari.*

**DEFINIZIONE 4** *L'insieme di tutte le permutazioni pari di  $S_n$  costituisce un sottogruppo di  $S_n$ , che si denota con  $A_n$  e si chiama *gruppo alterno* su  $n$  oggetti o di grado  $n$ .*

## Il gruppo alterno $A_n$

**ESERCIZIO 5** *Provare che risulta*

$$|A_n| = \frac{1}{2}n!. \quad (1)$$

**ESERCIZIO 6** *Provare che un ciclo é una permutazione pari o dispari a seconda che la sua lunghezza sia rispettivamente dispari o pari.*

**ESERCIZIO 7** *Provare che, se  $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s$  e  $\tau_1\tau_2\cdots\tau_t$  sono due fattorizzazioni in trasposizioni di una stessa permutazione, allora gli interi  $s$  e  $t$  hanno la stessa parit , cio  sono entrambi pari o entrambi dispari.*

## Gruppi di Permutazioni e Teorema di Cayley

Siano  $X$  un insieme non vuoto (finito o infinito) e  $Symm(X)$  il gruppo di tutte le permutazioni su  $X$ .

**DEFINIZIONE 8** Un gruppo  $G$  prende il nome *gruppo di permutazioni* su  $X$  se é sottogruppo di  $Symm(X)$ .

La teoria dei gruppi di permutazioni é equivalente all'intera teoria dei gruppi nel senso precisato dal seguente teorema.

**PROPOSIZIONE 9 (teorema di Cayley)** Ogni gruppo  $G$  é isomorfo ad un gruppo di permutazioni sull'insieme degli elementi di  $G$ .

**DIM.** Per ogni elemento  $g \in G$ , la traslazione destra di ampiezza  $g$

$$\tau_g : x \in G \rightarrow xg \in G$$

é una funzione biunivoca e quindi una permutazione sugli elementi di  $G$ . Si verifica facilmente che l'applicazione

$$\tau : g \in G \rightarrow \tau_g \in S(G)$$

é un monomorfismo di  $G$  in  $S(G)$ . Ne segue che  $G$  é isomorfo a  $\tau(G)$ , cioè l'asserto.

## Il 4-gruppo di Klein

Sia  $K = \{1, a, b, c\}$  ove é

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Allora  $K$ , rispetto alla moltiplicazione righe per colonne, é un sottogruppo abeliano di  $GL(2, Q)$  che si chiama *4-gruppo di Klein* o *gruppo quadrimio*.

In  $K$  valgono le seguenti proprietà :

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1, \quad ab = c, \quad ac = b, \quad bc = a.$$

Il 4-gruppo di Klein ha la seguente tabella di Cayley.

### TABELLA DI CAYLEY DEL 4-GRUPPO DI KLEIN

$\cdot$	1	$a$	$b$	$c$
1	1	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	1	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	1	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	1

**ESERCIZIO 10** *Provare che  $K$  é isomorfo al gruppo delle simmetrie di un rettangolo che non sia un quadrato.*

**ESERCIZIO 11** *Verificare che  $\{1, a\}$ ,  $\{1, b\}$ ,  $\{1, c\}$ , sono gli unici sottogruppi propri e non banali di  $K$  e disegnare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di  $K$ .*

**ESERCIZIO 12** *Provare che  $K$  e  $(Z_4, +)$  non sono gruppi isomorfi. Provare, inoltre, che un gruppo finito d'ordine 4 é isomorfo a  $K$  o a  $(Z_4, +)$ .*

## Il gruppo dei quaternioni

Sia  $Q_2 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$  ove é

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora  $Q_2$ , rispetto alla moltiplicazione righe per colonne, é un sottogruppo di  $GL(4, Q)$  che si chiama *gruppo dei quaternioni*.

In  $Q_2$  valgono le seguenti proprietá :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j.$$

Il gruppo dei quaternioni ha la seguente tabella di Cayley.

**TABELLA DI CAYLEY  
DEL GRUPPO  $Q_2$  DEI QUATERNIONI**

	1	$i$	$-1$	$-i$	$j$	$-k$	$-j$	$k$
1	1	$i$	$-1$	$-i$	$j$	$-k$	$-j$	$k$
$i$	$i$	$-1$	$-i$	1	$k$	$j$	$-k$	$-j$
$-1$	$-1$	$-i$	1	$i$	$-j$	$k$	$j$	$-k$
$-i$	$-i$	1	$i$	$-1$	$-k$	$-j$	$k$	$j$
$j$	$j$	$-k$	$-j$	$k$	$-1$	$-i$	1	$i$
$-k$	$-k$	$-j$	$k$	$j$	$i$	$-1$	$-i$	1
$-j$	$-j$	$k$	$j$	$-k$	1	$i$	$-1$	$-i$
$k$	$k$	$j$	$-k$	$-j$	$-i$	1	$i$	$-1$

## L'automorfo di un gruppo

Denotiamo con  $Aut(G)$  l'insieme di tutti gli automorfismi di un gruppo  $G$ . Sappiamo che il prodotto definito da

$$(f, g) \in Aut(G) \times Aut(G) \rightarrow f \circ g \in Aut(G)$$

induce una struttura di gruppo su  $Aut(G)$ . Questo gruppo si chiama *gruppo degli automorfismi di  $G$*  o *automorfo di  $G$* .

**OSSERVAZIONE 13** La funzione  $a \rightarrow a^n$ , se  $G$  é abeliano, é un automorfismo di  $G$ , per ogni intero  $n \neq 0$ .

**PROPOSIZIONE 14** La funzione  $a \rightarrow a^{-1}$  é un automorfismo di  $G$  se, e soltanto se,  $G$  é abeliano.

**DIM.** Se la nostra funzione é un automorfismo, per ogni  $a, b \in G$ , abbiamo

$$ab = (b^{-1}a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1} = ba.$$

**ESERCIZIO 15** Provare che un gruppo  $G$  é abeliano se, e solo se, l' applicazione

$$a \in G \rightarrow a^2 \in G$$

é un endomorfismo di  $G$ .