il gruppo simmetrico S_n

Se m, n sono interi positivi con $m < n$, ad ogni $\sigma \in S_m$ possiamo associare la permutazione $\sigma' \in S_n$ che opera come σ sugli interi $1, 2, \dots, m$ e trasforma in se stesso ogni altro elemento di N_n. L'applicazione

$$f : \sigma \in S_m \to \sigma' \in S_n$$

é un monomorfismo di gruppi e, quindi, l'immagine $f(S_m)$ é isomorfa ad S_m.

Nel seguito identificheremo S_m con $f(S_m)$ e, con abuso di notazione, denoteremo ancora con σ la permutazione $\sigma' = f(\sigma)$. Per esempio, con questa convenzione, la permutazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

considerata come elemento di S_6, é la permutazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo ancora che, se σ e τ sono le due permutazioni su N_3 definite da

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

risulta $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ e si ha cosí la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1 *Il gruppo simmetrico S_n non é abeliano per ogni intero n maggiore di 2.*

ESERCIZIO 2 *Provare che S_3 (che é non abeliano) possiede solo sottogruppi propri abeliani.*

cicli

DEFINIZIONE 3 Diciamo che un elemento j di N_n é *unito* o *fisso* in una permutazione σ se risulta $\sigma(j) = j$ e denotiamo con $F(\sigma)$ l'insieme degli elementi uniti di σ, cioé

$$F(\sigma) = \{x \in N_n \ : \ \sigma(x) = x\}.$$

Due permutazioni σ e τ si dicono *disgiunte* se i rispettivi insiemi di elementi non uniti, $N_n \setminus F(\sigma)$ e $N_n \setminus F(\tau)$, sono ad intersezione vuota.

ESERCIZIO 4 *Provare che due permutazioni disgiunte sono elementi permutabili di S_n.*

DEFINIZIONE 5 Una permutazione σ si dice *k-ciclo* o *ciclo di lunghezza k* se, detto j un elemento di N_n non unito in σ, risulta

$$N_n \setminus F(\sigma) = \left\{j, \sigma(j), \sigma^2(j), ..., \sigma^{k-1}(j)\right\}$$

e, in questo caso, si usa per σ la seguente notazione

$$\sigma = (j, \sigma(j), \sigma^2(j), ..., \sigma^{k-1}(j)).$$

Un n-ciclo $\sigma \in S_n$ prende il nome di *permutazione ciclica* di N_n. La permutazione identica, che si chiama *ciclo banale,* é l'unico ciclo di lunghezza 1.

ESEMPIO 6 Il 5-ciclo $\sigma = (2, 1, 3, 4, 7)$ di S_7 é la permutazione su N_7 definita da

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix};$$

in questo caso é $F(\sigma) = \{5, 6\}$ e si ha anche

$$\sigma = (1, 3, 4, 7, 2) = (3, 4, 7, 2, 1) = (4, 7, 2, 1, 3) = (7, 2, 1, 3, 4).$$

fattorizzazione in cicli disgiunti

ESERCIZIO 7 *Provare che*

$$(i_1, i_2, ..., i_k)^{-1} = (i_k, i_{k-1}, ..., i_1),$$

per ogni k-ciclo $(i_1, i_2, ..., i_k)$ di S_n.

PROPOSIZIONE 8 *Sia σ un k-ciclo di S_n. Allora risulta*

$$\sigma^k = 1 \ \text{ e } \ \sigma^h \neq 1, \ \text{ con } \ 1 \leq h < k,$$

cioé ogni $k-$ciclo é un elemento d'ordine k in S_n.

PROPOSIZIONE 9 *Ogni permutazione $\sigma \in S_n$ puó decomporsi in un prodotto di cicli non banali e disgiunti. Tale decomposizione é unica a meno dell'ordine dei cicli nella fattorizzazione.*

DIM. Essendo l'asserto ovvio nei casi $n = 1, 2$, possiamo supporre $n > 2$ e procedere per induzione su n. Siano, dunque, j un elemento di N_n non unito in σ ed m il piú piccolo intero positivo tale che $\sigma^m(j) = j$. Osserviamo che, nel caso $m = n$, σ é un ciclo di lunghezza n e non abbiamo nulla da provare. Se é $m < n$, detta τ la permutazione che fissa $j, \sigma(j), \sigma^2(j), ..., \sigma^{m-1}(j)$ e opera come σ sui rimanenti $n - m$ elementi di N_n, risulta

$$\sigma = \left(j, \sigma(j), \sigma^2(j), ..., \sigma^{m-1}(j)\right) \tau = \tau \left(j, \sigma(j), \sigma^2(j), ..., \sigma^{m-1}(j)\right).$$

Si noti che, per costruzione, il ciclo $(j, \sigma(j), \sigma^2(j), ..., \sigma^{m-1}(j))$ e la permutazione τ sono disgiunti e, quindi, permutabili. Inoltre, in forza della legge di cancellazione, τ é l'unica permutazione in S_n che verifica l'uguaglianza precedente. Allora, potendosi τ riguardare come una permutazione su $n-m$ oggetti, dall'ipotesi di induzione su n segue facilmente l'asserto.

DEFINIZIONE 10 Sia Σ l'insieme dei punti del piano euclideo R^2. Una permutazione f sugli elementi di Σ prende il nome di *isometria* se conserva la distanza euclidea d, cioé se:

$$d(A,B) = d(f(A), f(B)), \text{ per ogni due punti } A, B \in \Sigma.$$

Le isometrie di Σ formano un gruppo, che si chiama *gruppo delle isometrie di* Σ e si denota con $Isom(\Sigma)$.

ESEMPIO 11 Sono isometrie di Σ: le *traslazioni;* le *rotazioni* intorno ad un punto; le *simmetrie ortogonali,* o *riflessioni,* rispetto alle rette.

DEFINIZIONE 12 Sia X un sottoinsieme non vuoto di Σ. Un'isometria T di Σ tale che $T(X) = X$ si chiama *simmetria* di X. Le simmetrie di X costituiscono un sottogruppo del gruppo delle isometrie di Σ, che prende il nome di *gruppo delle simmetrie* di X e si denota con $Isom(X)$.

ESEMPIO 13 Il gruppo delle simmetrie di una circonferenza di centro un punto P ha per elementi tutte e sole le rotazioni di Σ intorno al punto P.

ESEMPIO 14 Il gruppo delle simmetrie di un rettangolo, che non sia un quadrato, contiene esattamente quattro elementi: *l'identitá, le simmetrie rispetto ai due assi, la rotazione di 180 gradi intorno al centro.* Tale gruppo si chiama 4$-$*gruppo di Klein*, o gruppo *quadrinomio*, ed é isomorfo al gruppo descritto dalla seguente tabella di Cayley.

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

il gruppo diedrale

DEFINIZIONE 15 Sia $P(n)$ un poligono regolare con $n \geq 3$ lati. Il gruppo delle simmetrie di $P(n)$ prende il nome di *gruppo diedrale di grado* n e si denota con D_n.

Alcune Proprietá di D_n

- D_n contiene esattamente $2n$ elementi:

(i) le n *rotazioni* $r_0 = 1, r_1, \ldots, r_{n-1}$ intorno al centro di $P(n)$, ove r_j denota la rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{n}j$.

(ii) le *riflessioni* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ rispetto agli n assi di simmetria di $P(n)$.

- Se denotiamo con Rot una rotazione e con Rif una riflessione, risulta

$Rot\ Rot = Rot,\ Rot\ Rif = Rif,\ Rif\ Rot = Rif,\ Rif\ Rif = Rot.$

- Le n rotazioni formano un sottogruppo di D_n (*sottogruppo delle rotazioni*).

- $s_j s_j = 1 \Rightarrow s_j = s_j^{-1} \Rightarrow \{1, s_j\}$ é un sottogruppo di D_n.

- $r_i^n = 1, \quad (s_i s_j)^n = 1, \quad r_i s_j = s_j r_i^{-1}$.

ESERCIZIO 16 *Provare che S_3 e D_3 sono gruppi isomorfi.*

ESERCIZIO 17 *Provare che il sottogruppo delle rotazioni di D_n é ciclico, un suo generatore essendo la rotazione r_1.*

il gruppo diedrale

ESERCIZIO 18 *Sia $P(n)$ un poligono regolare con n lati e si fissino due assi di simmetria di $P(n)$ formanti un angolo di $\frac{\pi}{n}$. Denotate con s e s' le corrispondenti riflessioni del gruppo diedrale D_n, provare che risulta*

$$D_n = < s, s' > .$$

(Si puó provare che ogni gruppo G generato da due elementi a, b tali che

$$a^2 = b^2 = 1 \ \text{ e } \ |ab| = n$$

é isomorfo a D_n.)

OSSERVAZIONE 19 *Se numeriamo ciclicamente in senso orario i vertici del poligono $P(n)$ con gli interi da 0 ad $n-1$, ogni elemento $g \in D_n$, trasformando vertici di $P(n)$ in vertici di $P(n)$, individua una permutazione $\overline{g}$ dell' insieme $X = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, cioé un elemento del gruppo $Symm(X)$. L'applicazione*

$$f \ : \ g \in D_n \to \overline{g} \in Symm(X)$$

é un monomorfismo di gruppi e quindi D_n é isomorfo al sottogruppo $f(D_n)$ di $Symm(X)$. Abbiamo cosí che il gruppo diedrale D_n puó essere identificato con un gruppo di permutazioni sui vertici del poligono $P(n)$.

ESERCIZIO 20 *Provare che il sottogruppo delle rotazioni di D_n é isomorfo al gruppo additivo degli interi modulo n.*

ESERCIZIO 21 *Provare che il gruppo diedrale D_n é isomorfo ad un gruppo di permutazioni sui lati del poligono P_n.*