

# **Richiami di geometria proiettiva su un campo**

## **1. Spazi proiettivi**

**DEFINIZIONE 1** Se  $V$  é uno spazio vettoriale di dimensione  $n + 1$  su un campo  $K$ , denotiamo con  $PG(V)$  l'insieme dei sottospazi 1–dimensionali di  $V$ , che chiameremo *punti* di  $PG(V)$ .

**DEFINIZIONE 2** Se  $W$  é un sottospazio vettoriale di  $V$  di dimensione  $h + 1$ ,  $0 \leq h \leq n$ , denotiamo con  $[W]$  il sottoinsieme di  $PG(V)$  costituito dai sottospazi 1–dimensionali di  $V$  contenuti in  $W$ , poniamo cioè

$$[W] = PG(W);$$

un insieme di questo tipo prende il nome di *sottospazio proiettivo*, o semplicemente *sottospazio*, di  $PG(V)$  di dimensione  $h$ .

Per convenzione, assumiamo che il vuoto sia un sottospazio di  $PG(V)$  di dimensione  $-1$ .

I sottospazi di  $PG(V)$  di dimensione 0 sono i punti di  $PG(V)$ , quelli di dimensione 1, 2,  $n - 1$  prendono rispettivamente il nome di *rette*, *piani*, *iperpiani*.

**DEFINIZIONE 3** Denotata con  $\mathcal{S}_j$  la famiglia di tutti i sottospazi proiettivi di  $PG(V)$  di dimensione  $j$ , con  $j = -1, 0, 1, 2, \dots, n$ , la coppia

$$(PG(V), (\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{n-1}, \mathcal{S}_n))$$

prende il nome di *spazio proiettivo associato a  $V$* , o anche *spazio proiettivo sul campo  $K$* . Tale spazio, con abuso di notazione, sarà denotato semplicemente con  $PG(V)$ . L'intero

$$n = \dim(V) - 1$$

si chiama *dimensione* di  $PG(V)$ .

**DEFINIZIONE 4** Lo spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale  $K^{n+1}$  si denota con  $PG(n, K)$  e si chiama *spazio proiettivo numerico di dimensione  $n$  su  $K$* .

**OSSERVAZIONE 5** Ogni sottospazio proiettivo di dimensione  $h$  di  $PG(V)$  può essere considerato spazio proiettivo di dimensione  $h$  sul campo  $K$ .

**OSSERVAZIONE 6** Se  $\{U_j\}_{j \in J}$  é una famiglia di sottospazi vettoriali di  $V$ , risulta

$$[\bigcap_{j \in J} U_j] = \bigcap_{j \in J} [U_j].$$

Ne segue che l'intersezione di sottospazi di  $PG(V)$  é ancora un sottospazio.

**DEFINIZIONE 7** Per ogni sottoinsieme  $X$  di  $PG(V)$ , si definisce sottospazio *generato* da  $X$ ,  $\langle X \rangle$ , l'intersezione di tutti i sottospazi che lo contengono. Il sottospazio generato dall'unione di due sottospazi  $H$  e  $T$  si denota con  $H + T$  e si chiama *somma* di  $H$  e  $T$ ; nel caso  $H \cap T = \emptyset$ ,  $H$  e  $T$  si dicono *sghembi* e la somma  $H + T$  si dice *diretta* e si denota con  $H \oplus T$ . Due sottospazi la cui somma diretta é uguale a  $PG(V)$  si dicono *supplementari*.

**OSSERVAZIONE 8** Le dimensioni di due sottospazi  $H$  e  $T$  sono legate fra loro dalla *formula di Grassmann*

$$\dim(H) + \dim(T) = \dim(H \cap T) + \dim(H + T).$$

**ESERCIZIO 9** *Provare che in  $PG(V)$  valgono le seguenti proprietà: • se  $X$  è un insieme di punti, risulta  $\langle X \rangle = X$  se, e solo se,  $X$  è un sottospazio; • due punti distinti appartengono ad un'unica retta; • se  $H$  è un sottospazio e  $P$  un punto non appartenente ad  $H$ , risulta*

$$\dim(H + P) = \dim(H) + 1;$$

*• un iperpiano ed un sottospazio di dimensione  $h + 1$  non contenuto nell' iperpiano si intersecano in un sottospazio di dimensione  $h$ ; • se  $H$  e  $T$  sono due sottospazi supplementari, risulta  $\dim(H) = n - \dim(T) - 1$ .*

**ESERCIZIO 10** Siano  $X$  un sottospazio di  $PG(V)$  e  $P, P'$  due punti distinti di  $X$ . Provare che la retta passante per  $P$  e  $P'$  é contenuta in  $X$ .

**ESERCIZIO 11** Se  $X$  é un insieme non vuoto di punti di  $PG(V)$  e  $P$  un punto non appartenente ad  $X$ , l'unione delle rette passanti per  $P$  e incidenti  $X$  si chiama cono di vertice  $P$  e base  $X$ .

Provare che, se  $X$  é un sottospazio di dimensione  $h$ , il cono di base  $X$  e vertice un punto  $P \notin X$  é un sottospazio di dimensione  $h + 1$ .

**PROPOSIZIONE 12** Provare che un insieme  $X$  di punti di  $PG(V)$  é un sottospazio se, e soltanto se, per ogni due punti distinti di  $X$ , la retta che li congiunge é contenuta in  $X$ .

**ESERCIZIO 13** Provare che due rette distinte di un piano di  $PG(V)$  si intersecano in esattamente un punto.

**Richiami di geometria  
proiettiva su un campo**

2. Il gruppo delle collineazioni

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su un campo  $K$ .

**DEFINIZIONE 14** Un *automorfismo* di  $V$  é una trasformazione lineare e biunivoca di  $V$ , cioè una permutazione  $L$  sugli elementi di  $V$  tale che

$$L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y}),$$

per ogni  $\alpha, \beta \in K$  e  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . Gli automorfismi di  $V$  formano un gruppo che si denota con  $GL(V)$  e si chiama *gruppo generale lineare*.

**DEFINIZIONE 15** Una permutazione  $T$  sugli elementi di  $V$  prende il nome di *automorfismo semilineare* se esiste un automorfismo  $\sigma$  del campo  $K$  tale che:

$$L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha^\sigma L(\mathbf{x}) + \beta^\sigma L(\mathbf{y}),$$

per ogni  $\alpha, \beta \in K$  e  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . L'automorfismo  $\sigma$  di  $K$  si dice *associato* a  $T$ . Gli automorfismi semilineari di  $V$  formano un gruppo che si denota con  $\Gamma L(V)$  e si chiama *gruppo semilineare*.

**OSSERVAZIONE 16** Un automorfismo semilineare di  $V$  il cui automorfismo associato é l'identitá di  $K$  é evidentemente un automorfismo di  $V$  e, quindi, risulta  $GL(V) \leq \Gamma L(V)$ . Ne segue che i gruppi  $GL(V)$  e  $\Gamma L(V)$  coincidono se, e solo se, l'identitá é l'unico automorfismo del campo  $K$ .

Per evitare confusione fra gli elementi di  $\Gamma L(V)$  e quelli di  $GL(V)$ , gli elementi di  $GL(V)$  vengono talvolta chiamati *automorfismi lineari*.

**ESERCIZIO 17** *Provare che ogni automorfismo semilineare di  $V$  trasforma sottospazi vettoriali di  $V$  in sottospazi vettoriali della stessa dimensione.*

**TEOREMA 18** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione maggiore di due. Allora, fissata una base di  $V$ , una permutazione su  $V$  é un automorfismo semilineare se, e solo se, insieme all'inversa, trasforma sottospazi vettoriali in sottospazi vettoriali della stessa dimensione.*

**ATTENZIONE** Se  $\mathbf{v}$  é un vettore non nullo di  $V$ , il simbolo  $\langle \mathbf{v} \rangle$  denoterá il sottospazio vettoriale generato da  $\mathbf{v}$  e denoteremo semplicemente con  $[\mathbf{v}]$  il corrispondente punto  $[\langle \mathbf{v} \rangle]$  di  $PG(V)$ .

**DEFINIZIONE 19** Se  $L$  é un automorfismo di  $V$ , possiamo considerare la permutazione  $\sigma_L$  sui punti di  $PG(V)$  definita da

$$\sigma_L : P = [\mathbf{v}] \rightarrow P' = [L(\mathbf{v})].$$

Una permutazione di questo tipo prende il nome di *proiettivit *. Le proiettivit  di  $PG(V)$  formano un gruppo che si denota con  $PGL(V)$  e si chiama *gruppo (lineare generale) proiettivo*. Lo studio delle propriet  di  $PG(V)$  invarianti rispetto a tale gruppo si chiama *geometria proiettiva* di  $P(V)$ .

**DEFINIZIONE 20** Siano  $V, V'$  due spazi vettoriali su  $K$  di dimensione maggiore di due. Una biiezione  $f$  fra i punti di  $PG(V)$  e quelli di  $PG(V')$  prende il nome di *collineazione* se  $f$ , insieme alla sua inversa, trasforma rette in rette.

Nel caso  $V$  e  $V'$  hanno dimensione due, una *collineazione* fra  $PG(V)$  e  $PG(V')$  é una funzione del tipo

$$P = [\mathbf{v}] \rightarrow P' = [T(\mathbf{v})],$$

ove  $T$  é una funzione semilineare fra  $V$  e  $V'$ .

**DEFINIZIONE 21** Le collineazioni di  $PG(V)$  in se stesso formano un gruppo, il *gruppo delle collineazioni di  $PG(V)$* , che si denota con  $P\Gamma L(V)$ . Lo studio delle proprietà di  $PG(V)$  invarianti rispetto a tale gruppo prende il nome di *geometria d'incidenza di  $PG(V)$* .

**TEOREMA 22** *Ogni proiettività é una collineazione, cioè*

$$PGL(V) \leq P\Gamma L(V).$$

**ESEMPIO 23** Se  $T$  é un automorfismo semilineare di  $V$ , possiamo considerare la permutazione  $\sigma_T$  sui punti di  $PG(V)$  definita da

$$P = [\mathbf{v}] \rightarrow P' = [T(\mathbf{v})].$$

La funzione  $\sigma_T$  é una collineazione di  $PG(V)$ .

**PROPOSIZIONE 24** *(teorema fondamentale) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione maggiore di due. Allora ogni collineazione  $\sigma$  di  $PG(V)$  é del tipo  $\sigma_T$ , con  $T$  opportuno elemento di  $\Gamma L(V)$ .*

## **Richiami di geometria proiettiva su un campo**

### 3. Spazi proiettivi finiti

**PROPOSIZIONE 25** *Il numero delle basi ordinate di  $V(n, q) = F_q^n$  é*

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1}).$$

*Detto  $h$  un intero,  $0 \leq h \leq n$ , il numero dei sottospazi vettoriali  $h$ -dimensionali di  $V(n, q)$  (coefficienti gaussiani) é*

$$\begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-h+1} - 1)}{(q^h - 1)(q^{h-1} - 1) \cdots (q - 1)}. \quad (1)$$

**DIM.** Il vettore  $e_1$  di una base ordinata  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , puó essere scelto in  $(q^n - 1)$  modi. Il vettore  $e_2$  deve essere scelto tra quelli che non appartengono al sottospazio di dimensione 1 generato da  $e_1$  e abbiamo  $(q^n - q)$  possibilitá per tale scelta. Allora, per induzione su  $n$ , si ha la prima parte.

L'argomentazione precedente prova che il numero di  $h$ -ple di vettori indipendenti di  $V(n, q)$  é esattamente

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{h-1}).$$

Allora il numero dei sottospazi  $V_h$  di dimensione  $h$  di  $V(n, q)$  si ottiene dividendo il numero delle  $h$ -ple di vettori indipendenti di  $V(n, q)$  per il numero delle basi di un  $V_h$  e da ciò segue l'asserto.

Se  $\mathcal{P} = PG(n, q)$  é lo spazio proiettivo numerico di dimensione finita  $n$  sul campo di Galois  $F_q$ ,  $q = p^r$  e  $p$  primo, poniamo

$$PGL(\mathcal{P}) = PGL(n+1, q), \quad P\Gamma L(\mathcal{P}) = P\Gamma L(n+1, q)$$

**OSSERVAZIONE 26** Secondo *H.S.M. Coxeter*, gli spazi proiettivi su  $GF(q)$  furono introdotti nel 1892 da *Gino Fano* nel caso  $q$  primo. Nel 1906, *O. Veblen* e *W.H. Bussey* estesero la costruzione di Fano al caso di arbitrarie potenze di primi e introdussero la notazione  $PG(n, q)$ .

**PROPOSIZIONE 27** Sia  $h$  un intero tale che  $0 \leq h \leq n$ . Il numero dei sottospazi proiettivi  $h$ -dimensionali di  $PG(n, q)$  é dato da

$$\left[ \begin{matrix} n+1 \\ h+1 \end{matrix} \right]_q = \frac{(q^{n+1} - 1)(q^n - 1) \cdots (q^{n+1-h} - 1)}{(q^{h+1} - 1)(q^h - 1) \cdots (q - 1)}. \quad (2)$$

In particolare il numero dei punti e il numero degli iperpiani di  $PG(n, q)$  é dato da

$$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1. \quad (3)$$

**PROPOSIZIONE 28** Siano  $h, n, k$  interi tali che  $0 \leq h, n - h - 1 \leq n - 1$  e  $h < k \leq n - 1$ . Siano  $S_h$  e  $S_{n-h-1}$  due fissati sottospazi proiettivi supplementari di  $PG(n, q)$ . Allora in  $PG(n, q)$  il numero di sottospazi proiettivi  $k$ -dimensionali contenenti  $S_h$  é uguale al numero dei sottospazi proiettivi  $(k - h - 1)$ -dimensionali contenuti in  $S_{n-h-1}$ . Inoltre, il numero dei sottospazi proiettivi  $k$ -dimensionali di  $PG(n, q)$  contenenti un fissato sottospazio di dimensione  $h$  é dato da

$$\left[ \begin{matrix} n - h \\ k - h \end{matrix} \right]_q = \frac{(q^{n-h} - 1)(q^{n-h-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^{k-h} - 1)(q^{k-h-1} - 1) \cdots (q - 1)}. \quad (4)$$

**DIM.** Se  $S_h$  e  $S_{n-h-1}$  sono sottospazi supplementari di  $PG(n, q)$ , la formula di Grassmann assicura che ogni sottospazio  $S_k$  di dimensione  $k$  contenente  $S_h$  interseca  $S_{n-h-1}$  in un sottospazio  $S_{k-h-1}$  di dimensione  $k - h - 1$ . L'applicazione

$$S_k \supset S_h \rightarrow S_{k-h-1} = S_k \cap S_{n-h-1} \subset S_{n-h-1}$$

é una biiezione fra i sottospazi di dimensione  $k$  contenenti  $S_h$  e quelli di dimensione  $k - h - 1$  contenuti in  $S_{n-h-1}$  e abbiamo cosí la prima parte dell'asserto. La seconda parte segue dalla 2.