OVALOIDI

1. Spazi proiettivi tridimensionali

DEFINIZIONE 1 Sia $V = F^4$ lo spazio vettoriale numerico di dimensione 4 su un campo F.

- Denotiamo con $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di V (*punti* di $\mathcal{P}$).
- Per ogni sottospazio W di V di dimensione 2, denotiamo con $[W]$ il sottoinsieme di $\mathcal{P}$ costituito dai sottospazi 1$-$dimensionali di V contenuti in W (*rette* di $\mathcal{P}$).
- Per ogni sottospazio W di V di dimensione 3, denotiamo con $[W]$ il sottoinsieme di $\mathcal{P}$ costituito dai sottospazi 1$-$dimensionali di V contenuti in W (*piani* di $\mathcal{P}$).
- Denotati con $\mathcal{L}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente gli insiemi delle rette e dei piani di $\mathcal{P}$, la terna

$$PG(3, F) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{B})$$

prende il nome di *spazio proiettivo (numerico) di dimensione* 3 *sul campo* F.

OSSERVAZIONE 2 Ogni piano di $PG(3, F)$ é un piano proiettivo sul campo F.

ATTENZIONE Se $\mathbf{a}$ é un vettore non nullo di F^4, denoteremo con $< \mathbf{a} >$ il sottospazio di V generato da $\mathbf{a}$ e con $[\mathbf{a}]$ il punto di $PG(3, F)$ corrispondente ad $< \mathbf{a} >$.

DEFINIZIONE **3** Un insieme di punti $\{[\mathbf{a}_j]\}$ dello spazio $PG(3, F)$ si dice *indipendente* (*dipendente*) se tale é l'insieme $\{\mathbf{a}_j\}$ in F^4.

OSSERVAZIONE **4** In $PG(3, F)$ valgono le seguenti proprietá:

- $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}$ indipendenti.
- Due punti distinti appartengono ad un'unica retta.
- $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}]$ allineati $\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dipendenti.
- Tre punti indipendenti appartengono ad un unico piano.
- Due piani distinti s'intersecano in una retta.
- Un punto ed una retta che non s'appartengono sono contenuti un un unico piano.
- Una retta ed un piano che non s'appartengono s'intersecano in un unico punto.

OSSERVAZIONE 5 Se $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ é un vettore non nullo di F^4, il punto $[a] \in PG(3, F)$ resta individuato da una qualsiasi quaterna

$$(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\ , \quad \text{con} \quad \lambda \neq 0.$$

Tali quaterne prendono il nome di *coordinate proiettive (omogenee) del punto* $[\mathbf{a}]$.
I piani di $PG(3, F)$ si rappresentano mediante equazioni lineari omogenee, cioé del tipo

$$ax + by + cz + dt = 0.$$

In particolare, se

$$\mathbf{a} = (a_j), \mathbf{b} = (b_j), \mathbf{c} = (c_j) \in F^4,\ j = 0, 1, 2, 3,$$

sono tre vettori indipendenti, il piano per i punti $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}]$ ha equazione:

$$det \begin{bmatrix} x & y & z & t \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 0$$

Sia $A \in GL(4, F)$ e sia L l'automorfismo di F^4 di equazione

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

ove (x_i) e (x'_i) rappresentano rispettivamente un generico vettore $\mathbf{x}$ e la sua immagine $L(\mathbf{x})$.

DEFINIZIONE 6 La (1) definisce una permutazione σ_L sui punti di $PG(3, F)$, che prende il nome di *proiettivitá*. Le proiettivitá di $PG(3, F)$ formano un gruppo: $PGL(4, F)$. La *geometria proiettiva* di $PG(3, F)$ é lo studio delle sue proprietá invarianti rispetto a $PGL(4, F)$.

ESERCIZIO 7 *Provare che due matrici*

$$A, B \in GL(3, F)$$

individuano la stessa proiettivitá di $PG(2, F)$ se, e solo se, esiste uno scalare non nullo $\rho \in F$ tale che $B = \rho A$.

OVALOIDI

2. Calotte e ovaloidi in $PG(3, q)$

Sia $PG(3,q)$ lo spazio proiettivo tridimensionale sul campo di Galois F_q.

DEFINIZIONE **8** Un insieme di k punti di $PG(3,q)$ prende il nome di *calotta di ordine* k, o $k-$*calotta*, se i suoi punti sono a tre a tre non allineati.

OSSERVAZIONE **9** Poiché le rette per un punto di $PG(3,q)$ sono in numero di q^2+q+1, si ha subito che per ogni $k-$calotta risulta

$$k \leq q^2+q+2. \tag{2}$$

DEFINIZIONE **10** Una $k-$calotta si dice *completa* se non é contenuta in una $(k+1)-$calotta; nel caso contrario si dice *incompleta*.

ESEMPIO **11** L'insieme dei punti di $PG(3,2)$ non appartenenti ad un piano fissato é una $8-$calotta massimale. Da notare che, in questo caso, l'ordine della calotta é il massimo consentito dalla (2).

Quadriche ellittiche di $PG(3,q)$

DEFINIZIONE 12 L'insieme $\mathcal{Q}$ dei punti di $PG(3,q)$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$\alpha x_0^2 + \beta x_0 x_1 + \gamma x_1^2 + x_2 x_3 = 0,$$

$$\alpha x_0^2 + \beta x_0 x_1 + \gamma x_1^2 \in F_q[x_0, x_1, x_2] \text{ irriducibile,}$$

prende il nome di *quadrica ellittica* di $PG(3,q)$.

OSSERVAZIONE 13 Per una quadrica ellittica $\mathcal{Q}$ valgono le seguenti proprietá:

- Una retta interseca $\mathcal{Q}$ in 0 (*esterna*), 1 (*tangente*) o 2 (*secante*) punti; cioé $\mathcal{Q}$ é una calotta.
- Per ogni punto $P \in Q$, l'unione delle rette per P tangenti a $\mathcal{Q}$ formano un piano(*piano tangente in* P).
- $\mathcal{Q}$ é una $(q^2+1)-$calotta massimale.

OSSERVAZIONE 14 Sia $\mathcal{K}$ una $k-$calotta di $PG(3,q)$. Una retta ℓ interseca $\mathcal{K}$ in 0, 1, o 2 punti; in corrispondenza di queste tre possibilitá, ℓ si dirá *esterna, tangente* o *secante* a $\mathcal{K}$.
Un piano π di $PG(3,q)$ interseca $\mathcal{K}$ in 0, 1, o $s>1$ punti (in questo caso gli s punti formano un $s-$arco di π). In corrispondenza dei tre casi descritti il piano π si dirá *esterno, tangente* o *secante* $\mathcal{K}$.

PROPOSIZIONE 15 *Siano q dispari e $\mathcal{K}$ una $k-$calotta di $PG(3,q)$. Allora risulta*

$$k \leq q^2 + 1.$$

Nel caso $k = q^2+1$, ogni piano secante $\mathcal{K}$ interseca $\mathcal{K}$ in un $(q+1)-$arco e ogni punto $P \in \mathcal{K}$ appartiene ad un unico piano tangente $\mathcal{K}$, il quale risulta l'unione delle $q+1$ rette per P tangenti a K.

DIM. Detti ℓ una retta secante $\mathcal{K}$ e π_j, $j = 1, .., q+1$, i piani per ℓ, denotiamo con n_j il numero dei punti di $\pi_j \cap \mathcal{K}$ non appartenenti ad ℓ.

• Poiché $\pi_j \cap \mathcal{K}$ é un $(n_j + 2)$-arco di π_j, risulta

$$n_j \leq q - 1$$

e (gli insiemi $\pi_j \setminus \ell$ formano una partizione di $PG(3, q) \setminus \ell$,)

$$k - 2 = \sum_{j=1}^{q+1} n_j \leq (q + 1)(q - 1) = q^2 - 1, \qquad (3)$$

cioé $k \leq q^2 + 1$. Ora supponiamo $k = q^2 + 1$.

• Sia π un piano con due punti distinti A, B su $\mathcal{K}$ e poniamo $\ell = AB$. Dalla (3) otteniamo $n_j = q - 1$, per ogni j, e cioé

$$|\mathcal{K} \cap \pi| = q + 1.$$

• Se π é un piano contenente due rette ℓ, m tangenti a $\mathcal{K}$ in un punto P, esso deve essere tangente a $\mathcal{K}$; altrimenti $\mathcal{K} \cap \pi$ sarebbe un $(q + 1) - arco$ di π con le rette ℓ, m entrambi tangenti in P e ció é assurdo.

PROPOSIZIONE **16** *Sia q pari. Allora una $k-$calotta $\mathcal{K}$ di $PG(3,q)$ é priva di rette tangenti se, e soltanto se, $q=2$, $k=8$ e $\mathcal{K}$ é il complementare di un piano.*

DIM. Supponiamo $\mathcal{K}$ priva di rette tangenti.

• $\mathcal{K}$ contiene esattamente q^2+q+2 punti e il numero delle rette secanti $\mathcal{K}$ é

$$\binom{q^2+q+2}{2} = \frac{1}{2}(q^2+q+2)(q^2+q+1).$$

• Tale numero é minore di quello delle rette di $PG(3,q) \Rightarrow$ esiste una retta ℓ esterna a $\mathcal{K}$.

• Ogni piano π per ℓ o é esterno a $\mathcal{K}$ o interseca $\mathcal{K}$ in un $(q+2)-$arco (se $P \in \pi \cap \mathcal{K}$, ogni retta di π per P interseca $\mathcal{K}$ in esattamente due punti). Ne segue che $k = q^2+q+2$ é un multiplo di $q+2$, cioé é del tipo

$$k = q^2+q+2 = (q-2)(q+2)+4+(q+2) = h(q+2),$$

con h intero positivo, e

$$(q-2) + \frac{4}{q+2} + 1 = h.$$

Allora $\frac{4}{q+2}$ é un intero e, di conseguenza, é $q=2$ e $k=8$.

• $PG(3,2) \setminus \mathcal{K}$ ha 7 punti ed é chiuso rispetto alle rette e, quindi, é un piano.

PROPOSIZIONE **17** *Siano q pari e $\mathcal{K}$ una $k-$calotta di $PG(3,q)$ con $k \geq q^2+1$. Allora ogni retta tangente a $\mathcal{K}$ é contenuta in almeno un piano che interseca $\mathcal{K}$ in un $(q+1)-$arco.*

DIM. Sia ℓ una retta tangente a $\mathcal{K}$ in un suo punto P e osserviamo che ogni piano per ℓ interseca $\mathcal{K}$ in al piú $q+1$ punti. Se nessuno di tali piani incontrasse $\mathcal{K}$ in $q+1$ punti, avremmo

$$q^2 \leq k-1 \leq (q-1)(q+1) = q^2-1,$$

il che é assurdo.

PROPOSIZIONE **18** *Siano $q > 2$ pari e $\mathcal{K}$ una $k-$calotta di $PG(3,q)$. Allora risulta*

$$k \leq q^2+1.$$

Nel caso $k = q^2+1$, ogni piano secante $\mathcal{K}$ interseca $\mathcal{K}$ in un $(q+1)-$arco e ogni punto $P \in \mathcal{K}$ appartiene ad un unico piano tangente $\mathcal{K}$, il quale risulta l'unione delle $q+1$ rette per P tangenti a K.

DIM. Supponiamo che $\mathcal{K}$ sia massimale e

$$q^2 + 1 \leq k < q^2 + q + 2.$$

• Scelto un punto $P \in \mathcal{K}$, siano ℓ una retta tangente a $\mathcal{K}$ in P e π un piano per ℓ che intersechi $\mathcal{K}$ in un $(q+1)-$arco Ω.
• Detto N il nucleo di Ω, osserviamo che esiste almeno una retta m per N secante $\mathcal{K}$, altrimenti $\mathcal{K} \cup \{N\}$ sarebbe una $(k+1)-$calotta, contro la massimalitá di $\mathcal{K}$.
• La retta m non é contenuta in π e ogni piano per m contiene una retta tangente ad Ω e quindi a $\mathcal{K}$.
$\Rightarrow$ ognuno di tali piani interseca $\mathcal{K}$ in al piú $q+1$ punti e quindi é

$$q^2 - 1 \leq k - 2 \leq (q-1)(q+1) = q^2 - 1, \qquad (4)$$

da cui ricaviamo $k = q^2 + 1$. $\Rightarrow$ ogni calotta di $PG(3,q)$ contiene al piú $q^2 + 1$ punti.
• Se $k = q^2 + 1$, ogni punto di $\mathcal{K}$ appartiene ad esattamente $q+1$ rette tangenti. Inoltre dalla (4) ricaviamo che ogni piano α per m interseca $\mathcal{K}$ in un $(q+1)-$arco Ω_α e l'unica retta per N tangente ad Ω_α é contenuta in π. Ne segue che N appartiene ad esattamente $q+1$ rette tangenti $\mathcal{K}$ e queste sono le rette per N contenute in π.

• Osserviamo esplicitamente che la (4) é stata provata nella sola ipotesi che m sia una retta per N secante $\mathcal{K}$ e quindi, ragionando in modo analogo, si ha che ogni piano contenente una retta per N secante K interseca K in un $(q+1)-$arco. • Sia ℓ' una retta tangente a $\mathcal{K}$ in P diversa da ℓ e sia β il piano di ℓ e ℓ'. Tale piano non puó contenere un punto $T \in \mathcal{K}$ diverso da P, altrimenti la retta NT, non essendo contenuta in π, sarebbe secante $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K} \cap \beta$ sarebbe un $(q+1)-$arco di β per P con ℓ e ℓ' tangenti distinte in P, un assurdo. $\Rightarrow$ le $q+1$ rette tangenti a $\mathcal{K}$ in P appartengono tutte al piano β. • Nell'ipotesi $k = q^2 + 1$, consideriamo un piano τ contenente due punti distinti A, B di $\mathcal{K}$ e osserviamo che, poiché le $q+1$ rette tangenti a $\mathcal{K}$ in A giacciono sullo stesso piano, ogni piano per la retta AB deve contenere esattamente $q+1$ punti di $\mathcal{K}$.

CONCLUSIONE **19** *Se é $q > 2$ e $\mathcal{K}$ una $k-$calotta di $PG(3, q)$, allora risulta*

$$k \leq q^2 + 1.$$

Nel caso $k = q^2+1$, ogni piano secante $\mathcal{K}$ interseca $\mathcal{K}$ in un $(q+1)-$arco e ogni punto $P \in \mathcal{K}$ appartiene ad un unico piano tangente $\mathcal{K}$, il quale risulta l'unione delle $q+1$ rette per P tangenti a K.

DEFINIZIONE **20** Una $(q^2+1)-$calotta di $PG(3, q)$, $q > 2$, prende il nome di *ovaloide.*

PROPOSIZIONE **21** *Sia $\mathcal{K}$ un ovaloide di $PG(3, q)$. Allora in $PG(3, q)$ non esistono piani esterni a $\mathcal{K}$.*

DIM. Detto ν il numero dei piani π secanti $\mathcal{K}$ in $q+1$ punti, facciamo il doppio conteggio delle coppie $(\pi, \{A, B, C\})$, ove $\{A, B, C\}$ é un insieme di tre punti scelti in $\pi \cap \mathcal{K}$. Abbiamo:

$$\nu\binom{q+1}{3} = \binom{q^2+1}{3} \;\Rightarrow\; \nu = q^3 + q.$$

L'asserto segue, allora, tenendo presente che dei q^3+q^2+q+1 piani di $PG(3, q)$ ve ne sono esattamente q^2+1 tangenti a $\mathcal{K}$.

Nel caso q dispari, usando il teorema di Segre, é possibile ottenere la seguente classificazione degli ovaloidi, trovata indipendentemente da *A.Barlotti* e *G.Panella.*

PROPOSIZIONE 22 *Se q é dispari, ogni ovaloide di $PG(3, q)$ é una quadrica ellittica.*

OSSERVAZIONE 23 Nel caso q pari la prop.22 é falsa. Il primo esempio di ovaloide diverso da una quadrica ellittica fu trovato in $PG(3, 8)$ da *B.Segre* nel 1959. Nel 1962 *J.Tits* ha trovato un esempio per ogni q potenza dispari di 2 (*ovaloidi di Tits*). Nel caso $q = 8$ l'esempio di Tits coincide con quello di Segre.

CONGETTURA 24 Le quadriche ellittiche e gli ovaloidi di Tits sono gli unici tipi di ovaloidi di $PG(3, q)$, q pari.

ESERCIZIO 25 *Siano $\mathcal{K}$ un ovaloide di $PG(3, q)$ e P un punto su $\mathcal{K}$. Siano $\mathcal{P}$ l'insieme dei punti di $\mathcal{K}$ diversi da P e $\mathcal{L}$ l'insieme dei $(q+1)-$archi per P contenuti in $\mathcal{K}$ e privati del punto P. Provare che $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é un piano affine d'ordine q isomorfo ad $AG(2, q)$.*

Valori noti di $M_t(m-1,q)$

$m-1$	q	t	$M_t(m-1,q)$	
>1		1	$\frac{q^m-1}{q-1}$	
>1	2	2	2^{m-1}	$Bose$1947
2	$pari$	2	$q+2$	$Bose$1947
2	$dispari$	2	$q+1$	$Bose$1947
3	$dispari$	2	q^2+1	$Bose$1947
3	$pari>2$	2	q^2+1	$Qvist$1952
4	3	2	20	$Pellegrino$1970
5	3	2	56	$Hill$1973