



## Capitolo 12

# Estensioni di disegni

### 12.1 Generalit 

Abbiamo visto che, per ogni punto  $x$  di un  $t - (v, k, \lambda)$  disegno  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  con  $t > 1$ ,   possibile costruire un  $(t - 1) - (v - 1, k - 1, \lambda)$  disegno  $\mathbf{D}_x$ : il derivato di  $\mathbf{D}$  rispetto ad  $x$ . I punti e i blocchi di tale disegno sono rispettivamente i punti di  $\mathbf{D}$  diversi da  $x$  e i blocchi di  $\mathbf{D}$  contenenti  $x$  e privati di tale punto. Ci proponiamo ora di definire un'operazione, in qualche modo inversa di quella di derivazione rispetto ad un punto, che prende il nome di estensione. Pi  precisamente, diciamo che un  $(t + 1)$ -disegno  $\mathbf{E}$    una estensione di  $\mathbf{D}$  se esiste un punto  $p$  di  $\mathbf{E}$  tale che  $\mathbf{E}_p = \mathbf{D}$ . In questo caso il disegno  $\mathbf{D}$  si dice estendibile. E' chiaro che, per  $t > 1$ , ogni  $t$ -disegno   estensione del derivato rispetto ad un suo qualsiasi punto. Stabilire invece quando un  $t$ -disegno   estendibile   un problema che in generale si presenta di non facile soluzione. Una semplice condizione necessaria per l'estendibilit  di un disegno   la seguente.

**PROPOSIZIONE 12.1.1.** *Se un  $t - (v, k, \lambda)$  disegno  $\mathbf{D}$    estendibile, allora  $k + 1$  divide  $b(v + 1)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathbf{E}$    un'estensione di  $\mathbf{D}$  e  $x$  un suo punto tale che  $\mathbf{E}_x = \mathbf{D}$ , il numero dei blocchi di  $\mathbf{E}$  contenenti  $x$    uguale a  $b$ . Allora dalla 10.4 segue che il numero di tutti i blocchi di  $\mathbf{E}$  risulta  $(v + 1)b/(k + 1)$  e cio  l'asserto.  $\square$

**ESERCIZIO 12.1.2.** *Provare che, a meno di isomorfismi,  $AG_2(3, 2)$    l'unica estensione del piano di Fano  $PG(2, 2)$ . Provare inoltre che  $AG_2(3, 2)$  non   estendibile.*

**OSSERVAZIONE 12.1.3.** I parametri di un piano affine d'ordine  $n$  (cfr. 10.1.5) verificano la condizione della 12.1.1 e l'esercizio 10.4.2 assicura che ogni piano affine  $AG(2, q)$    estendibile in un piano inversivo immergibile d'ordine  $q$ .  $\square$

Se  $G$    un gruppo di automorfismi di un  $(t + 1)$ -disegno  $\mathbf{D}$ , allora lo stabilizzatore  $G_x$  di un punto  $x$  di  $\mathbf{D}$    un gruppo di automorfismi del  $t$ -disegno derivato  $\mathbf{D}_x$ . Inoltre, se  $G$    altamente transitivo sui punti di  $\mathbf{D}$ , esso risulta un'estensione di  $G_x$  pensato come gruppo transitivo di permutazioni sui punti di  $\mathbf{D}_x$ . Pertanto   naturale chiedersi se esistono relazioni tra le estensioni dei disegni e le estensioni dei gruppi transitivi. A tale scopo consideriamo un  $t - (v, k, \lambda)$  disegno

$\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  con  $t > 1$  e supponiamo che esista un gruppo  $G$  di automorfismi di  $\mathbf{D}$  che sia  $t$ -transitivo sui punti e transitivo sui blocchi di  $\mathbf{D}$ . Supponiamo inoltre che  $G$ , considerato come gruppo di permutazioni su  $\mathcal{P}$ , ammetta un'estensione  $(G^+, \mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{x\})$ . Scelto allora un blocco  $B$  di  $\mathbf{D}$  e posto  $B' = B \cup \{x\}$ , l'orbita  $G^+(B')$  di  $B'$  rispetto all'azione di  $G^+$  sui  $(k+1)$ -sottoinsiemi di  $\mathcal{P}^+$ , definisce un  $(t+1) - (v+1, k+1, \lambda^+)$  disegno  $\mathbf{D}(\mathcal{P}^+, G^+, B') = (\mathcal{P}^+, G^+(B'))$ , come mostrato nell'esempio 10.1.12. Tale disegno non é in generale un'estensione di  $\mathbf{D}$  ed é chiaro che una condizione necessaria affinché lo sia é che risulti  $\lambda^+ = \lambda$ . Con la proposizione che segue proveremo che quest'ultima condizione é anche sufficiente.

**PROPOSIZIONE 12.1.4.** *Siano  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  un  $t - (v, k, \lambda)$  disegno con  $t > 1$  e  $G$  un gruppo di automorfismi  $t$ -transitivo sui punti e transitivo sui blocchi. Siano inoltre  $(G^+, \mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{x\})$  una estensione di  $(G, \mathcal{P})$ ,  $B$  un blocco di  $\mathbf{D}$  e  $B' = B \cup \{x\}$ . Allora il  $(t+1) - (v+1, k+1, \lambda^+)$  disegno  $\mathbf{D}(\mathcal{P}^+, G^+, B')$  é una estensione di  $\mathbf{D}$  se, e soltanto se, risulta  $\lambda^+ = \lambda$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** E' chiaro che, se  $\mathbf{D}(\mathcal{P}^+, G^+, B')$  é un'estensione di  $G$ , deve essere  $\lambda^+ = \lambda$ .

Nell'ipotesi che sia  $\lambda^+ = \lambda$ , denotiamo con  $r^+$  il numero dei blocchi di  $\mathbf{D}(\mathcal{P}^+, G^+, B')$  contenenti un fissato punto e osserviamo che, in forza della 10.1, risulta

$$r = \frac{(v-t+1)(v-t+2) \cdots (v-2)(v-1)}{(k-t+1)(k-t+2) \cdots (k-2)(k-1)} \lambda,$$

$$r^+ = \frac{(v-t+1)(v-t+2) \cdots (v-2)(v-1)v}{(k-t+1)(k-t+2) \cdots (k-2)(k-1)k} \lambda,$$

onde, per la 10.4 abbiamo

$$r^+ = \frac{rv}{k} = \frac{bk}{k} = b.$$

Ne segue che il derivato di  $\mathbf{D}(\mathcal{P}^+, G^+, B')$  rispetto ad  $x$  contiene  $b$  blocchi che, essendo  $G$  transitivo su  $\mathcal{B}$  e  $G_x^+ = G$ , sono tutti e soli i blocchi di  $\mathbf{D}$  e l'asserto é provato.  $\square$

## 12.2 Estensioni di 2-disegni simmetrici

La condizione della 12.1.1 é verificata dai parametri dei 2-disegni di Hadamard e si puó provare che questi sono estendibili in un unico modo, a meno di isomorfismi. Di fatto i 2-disegni di Hadamard e  $PG(2, 4)$  sono gli unici esempi noti di disegni simmetrici estendibili.

**PROPOSIZIONE 12.2.1.** *Ogni 2-disegno di Hadamard ammette, a meno di isomorfismi, un'unica estensione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  un  $2 - (4n-1, 2n-1, n-1)$  disegno di Hadamard e, fissati tre punti distinti  $a, b$  e  $c$ , poniamo

$$\mu = \text{numero di blocchi contenenti } \{a, b, c\},$$

$$\nu = \text{numero di blocchi disgiunti da } \{a, b, c\},$$

e osserviamo che risulta

$$\lambda_1 = 2n - 1.$$

Applicando il principio di inclusione-esclusione, abbiamo

$$\nu = b - 3\lambda_1 + 3\lambda - \mu = 4n - 1 - 6n + 3 + 3n - 3 - \mu = n - 1 - \mu$$

e quindi

$$\nu + \mu = n - 1, \tag{12.1}$$

per ogni tre punti distinti di  $\mathbf{D}$ . Allora, detto  $x$  un elemento non appartenente a  $\mathcal{P}$  e posto

$$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{x\},$$

$$\mathcal{B}^+ = \{B \cup \{x\} : B \in \mathcal{B}\} \cup \{\mathcal{P} \setminus B : B \in \mathcal{B}\},$$

in forza della 12.1, si ha subito che la coppia  $(\mathcal{P}^+, \mathcal{B}^+)$  é un  $3 - (4n, 2n, n - 1)$  disegno tale che  $(\mathcal{P}^+, \mathcal{B}^+)_x \sim \mathbf{D}$  e quindi é un'estensione di  $\mathbf{D}$ .

Ora, se  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  é un  $3 - (4n, 2n, n - 1)$  disegno, detto  $x$  un punto di  $\mathcal{P}$ , si ha subito che  $\mathbf{D}_x$  é un  $2 - (4n - 1, 2n - 1, n - 1)$  disegno di Hadamard e, quindi é simmetrico. Ne segue, in forza della prop.11.1.2, che due blocchi distinti di  $\mathbf{D}_x$  s'intersecano in  $n - 1$  punti e, di conseguenza, due blocchi di  $\mathbf{D}$  o sono disgiunti o hanno esattamente  $n$  punti in comune. Detto  $B$  un blocco di  $\mathbf{D}$ , diciamo  $\tau$  il numero delle coppie  $(y, B')$ , ove  $y$  é un punto di  $B$  e  $B'$  un blocco diverso da  $B$  e contenente  $y$ . Se  $m$  é il numero di blocchi incidenti  $B$  e diversi da esso, abbiamo

$$\tau = nm.$$

D'altra parte, ogni punto  $y$  di  $B$  appartiene a  $\lambda_1 = 4n - 1$  blocchi e quindi

$$\tau = 2n(4n - 2).$$

Ne segue che

$$nm = 8n^2 - 4n,$$

cioé

$$m = 8n - 4 = b - 2.$$

L'ultima uguaglianza ci dice che esiste esattamente un blocco  $B'$  disgiunto da  $B$  e, poiché ogni blocco contiene  $2n$  punti ed é  $v = 4n$ , risulta  $B' = \mathcal{P} \setminus B$ . Allora, ricordando come abbiamo costruito un'estensione di un disegno di Hadamard, si ha che questa estensione é unica e la proposizione é completamente provata.  $\square$

**DEFINIZIONE 12.2.2.** Le estensioni dei 2-disegni di Hadamard, cioè i 3-disegni con parametri  $(4n, 2n, n - 1)$ , prendono il nome di *3-disegni di Hadamard*.  $\square$

Osserviamo che il piano di Fano  $PG(2, 2)$ , essendo un 2-disegno di Hadamard, é estendibile con la costruzione descritta nel corso della dimostrazione della proposizione precedente.

I 2-disegni di Hadamard e  $PG(2, 4)$  sono gli unici esempi noti di 2-disegni simmetrici estendibili. Riguardo a tale problematica, riportiamo due risultati che danno informazioni precise sui parametri di un piano proiettivo e, piú in generale, di un 2-disegno simmetrico estendibili.

**PROPOSIZIONE 12.2.3.**  $PG(2, 2)$  e  $PG(2, 4)$  sono gli unici piani proiettivi estendibili.

**DIMOSTRAZIONE.** In forza della prop.12.1.1, se  $\pi_n$  é un piano proiettivo estendibile, allora

$$n + 2 \text{ divide } (n^2 + n + 1)(n^2 + n + 2) = (n + 2)(n^3 + 4n - 5) + 12.$$

Ne segue che  $n + 2$  deve dividere 12 e, essendo  $n > 1$ , abbiamo  $n = 2, 4, 10$ . Poiché, come abbiamo già avuto modo di osservare, non esiste un piano proiettivo d'ordine dieci e poiché  $PG(2, 2)$  e  $PG(2, 4)$  sono gli unici piani proiettivi rispettivamente di ordini 2 e 4, l'asserto é completamente provato.  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.2.4.** (teorema di P.J.Cameron) Se un  $2 - (v, k, \lambda)$  disegno simmetrico  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  é estendibile, allora abbiamo una delle seguenti possibilità:

(i)  $\mathbf{D}$  é un  $2$ -disegno di Hadamard;

(ii)  $v = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)$ ,  $k = \lambda^2 + 3\lambda + 1$ ;

(iii)  $v = 495$ ,  $k = 39$ ,  $\lambda = 3$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{E} = (\mathcal{P}^+, \mathcal{B}^+)$  un  $3 - (v + 1, k + 1, \lambda)$  disegno estensione di  $\mathbf{D}$  e osserviamo che, in tali ipotesi, due blocchi distinti di  $\mathbf{E}$  s'intersecano in zero o  $\lambda + 1$  punti. Siano  $x$  e  $y$  punti distinti e  $B$  un blocco di  $\mathbf{E}$  non contenente  $x$  e  $y$  e diciamo  $\nu^+$  il numero di blocchi di  $\mathbf{E}$  incidenti  $x$  e  $y$  e aventi  $\lambda + 1$  punti in comune con  $B$ . Facendo il doppio conteggio delle coppie ordinate formate da un punto  $z$  di  $B$  e da un blocco contenente  $x, y$ , e  $z$ , abbiamo  $\nu^+(\lambda + 1) = \lambda(k + 1)$ , cioè

$$\nu^+ = \frac{\lambda(k + 1)}{\lambda + 1}.$$

Poiché due punti di  $\mathbf{E}$  appartengono ad esattamente  $k$  blocchi, il numero  $\nu^-$  dei blocchi per  $x$  e  $y$  e disgiunti da  $B$  é dato da

$$\nu^- = k - \frac{\lambda(k + 1)}{\lambda + 1} = \frac{k - \lambda}{\lambda + 1}.$$

Ne segue che i punti di  $\mathbf{E}$  non appartenenti a  $B$  e i blocchi di  $\mathbf{E}$  contenuti in  $\mathcal{P}^+ \setminus B$  formano un  $2 - (v - k, k + 1, (k - \lambda)/(\lambda + 1))$  disegno  $\mathbf{D}'$  i cui parametri saranno denotati con  $v', k', \lambda', b', r'$ . Dalle 10.4 e 10.5, abbiamo rispettivamente

$$r' = \frac{b'k'}{v'} = \frac{b'(k + 1)}{v - k}$$

$$r' = \frac{\lambda'(v' - 1)}{k' - 1} = \frac{(k - \lambda)(v - k - 1)}{k(\lambda + 1)}$$

da cui segue che

$$b' = \frac{(v - k)(v - k - 1)(k - \lambda)}{(k + 1)k(\lambda + 1)}.$$

Ora, se  $b' = 1$ , dalle relazioni precedenti abbiamo

$$v = 2k + 1 \text{ e } k = 2\lambda + 1,$$

da cui segue che  $\mathbf{D}$  é un 2–disegno di Hadamard. Se  $b' > 1$ , ricordiamo che per la 10.5 é

$$\lambda(v-1) = k(k-1)$$

e applicando a  $\mathbf{D}'$  la disuguaglianza di Fisher, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{(v-k)(v-k-1)(k-\lambda)}{(k+1)k(\lambda+1)} &\geq v-k \Rightarrow \\ (v-k-1)(k-\lambda) - (k+1)k(\lambda+1) &\geq 0 \Rightarrow \\ \left(\frac{k(k-1)}{\lambda} - k\right)(k-\lambda) - (k+1)k(\lambda+1) &\geq 0 \Rightarrow \\ (k(k-1) - \lambda k)(k-\lambda) - (k+1)k\lambda(\lambda+1) &\geq 0 \Rightarrow \\ (k-1-\lambda)(k-\lambda) - (k+1)\lambda(\lambda+1) &\geq 0 \Rightarrow \\ k^2 - (2\lambda+1)k + \lambda(\lambda+1) - k\lambda(\lambda+1) - \lambda(\lambda+1) &\geq 0 \Rightarrow \\ k - (\lambda^2 + 3\lambda + 1) &\geq 0 \Rightarrow \\ k+1 &\geq \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2). \end{aligned} \tag{12.2}$$

Inoltre, tornando al 3–disegno  $\mathbf{E}$  e osservando che ogni suo punto appartiene ad esattamente  $b = v$  blocchi, abbiamo

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}^+| &= \frac{(v+1)v}{k+1} = \frac{(k^2 - k + 2\lambda)(k^2 - k + \lambda)}{(k+1)\lambda^2} = \\ \frac{[(k+1-1)^2 - k - 1 + 1 + 2\lambda][(k+1-1)^2 - k + 1 - 1 + \lambda]}{(k+1)\lambda^2} &= \\ \frac{[(k+1)(k-2) + 2 + 2\lambda][(k+1)(k-2) + 2 + \lambda]}{(k+1)\lambda^2} &= \\ \frac{(k+1)^2(k-2)^2 + (k+1)(k-2)(4+3\lambda) + 2(\lambda+1)(\lambda+2)}{(k+1)\lambda^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che  $k+1$  divide  $2(\lambda+1)(\lambda+2)$ . Allora, anche in forza della (12.2), abbiamo

$$k+1 = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

oppure

$$k+1 = 2(\lambda+1)(\lambda+2).$$

Nel primo caso risulta

$$k = \lambda^2 + 3\lambda + 1$$

e quindi

$$v = (\lambda+2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2),$$

cioé la (ii). Nel secondo caso, dalla espressione di  $|\mathcal{B}^+|$ , abbiamo che  $\lambda$  deve dividere 3 e quindi  $\lambda = 1, 3$ . Quando é  $\lambda = 1$  si ottiene  $k = 11$  ed  $\mathbf{E}$  é un 3–(112, 12, 1) disegno, cioé un'estensione di un piano proiettivo d'ordine dieci, il che non é possibile. Quando é  $\lambda = 3$  si ottiene la (iii) e l'asserto é completamente provato.  $\square$

### 12.3 I gruppi di Mathieu

Una delle conseguenze della classificazione dei gruppi semplici finiti é che, a parte i gruppi simmetrici e alterni, esistono soltanto due gruppi 4–transitivi e due 5–transitivi (cfr.[27]). Essi furono scoperti nella seconda metà del secolo scorso da *E.Mathieu* ([60],[61]) ed oggi portano il suo nome. Per una lettura approfondita sull'argomento si consiglia [36].

I gruppi di Mathieu hanno una grossa importanza dal punto di vista storico essendo stati per quasi un secolo gli unici esempi di gruppi semplici finiti *sporadici*. Essi, inoltre, giocano un ruolo fondamentale in diverse teorie matematiche, in modo particolare in combinatoria, e per tale motivo ci proponiamo di accennarne una descrizione. Per la loro costruzione useremo un metodo dovuto a *E.Witt* ([92],[93]) e che in sostanza é una applicazione della teoria delle estensioni dei gruppi altamente transitivi descritta nel paragrafo 1.2.4.

**PROPOSIZIONE 12.3.1.** *Il gruppo  $G = PSL(3, 4)$ , nella sua azione 2–transitiva sui ventuno punti del piano proiettivo  $PG(2, 4)$ , ha una estensione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Denotiamo con  $X = \{p_1, p_2, \dots, p_{21}\}$  l'insieme dei punti di  $PG(2, 4)$ . Identifichiamo tali punti con le loro coordinate  $(x, y, t)$  in un fissato riferimento proiettivo di  $PG(2, 4)$  e supponiamo che sia

$$p_1 = (1, 0, 0) \quad , \quad p_2 = (0, 1, 0).$$

Introduciamo la permutazione  $\eta_1$  su  $X$  definita da

$$\eta_1(x, y, t) = (x^2 + yt, y^2, t^2) \quad , \quad \text{per ogni } (x, y, t) \in X$$

e osserviamo che risulta

$$\eta_1(p_1) = p_1 \quad \text{e} \quad \eta_1(p_2) = p_2.$$

Detto  $p$  un elemento non appartenente a  $X$ , poniamo  $Y = X \cup \{p\}$  e consideriamo la permutazione  $\varepsilon_1$  su  $X$  e l'elemento  $\sigma \in G$  definiti da

$$\varepsilon_1(p) = p_1 \quad \text{e} \quad \varepsilon_1(p_i) = \begin{cases} p & \text{se } i = 1 \\ \eta_1(p_i) & \text{se } i \neq 1 \end{cases} \quad ,$$

$$\sigma(x, y, t) = (y, x, t) \quad , \quad \text{per ogni } (x, y, t) \in X.$$

Poiché risulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(p_1) = p \quad , \quad \varepsilon_1(p) = p_1 \quad , \quad \varepsilon_1(p_2) = p_2, \\ \sigma(p_1) = p_2 \quad , \quad \sigma(p_2) = p_1 \quad , \quad \sigma^2 = 1, \end{aligned}$$

sono verificate le condizioni (1) e (2) della 2.4.4.

E' facile controllare che  $(\varepsilon_1\sigma)^3$  fissa i punti  $p_1, p_2$  e  $p$  e che su un punto  $p_i$ , diverso dai precedenti e di coordinate  $(x, y, t)$ , abbiamo

$$(\varepsilon_1\sigma)^3(p_i) = (\varepsilon_1\sigma)^3(x, y, t) = (y^2(1+t^3) + xt, yt + x^2(1+t^3), t^2).$$

Ora, se  $t \neq 0$ , risulta  $t^3 = 1$  e

$$(\varepsilon_1\sigma)^3(p_i) = (\varepsilon_1\sigma)^3(x, y, t) = (xt, yt, t^2) = t(x, y, t) = p_i.$$

Se invece  $t = 0$ , abbiamo

$$(\varepsilon_1\sigma)^3(p_i) = (\varepsilon_1\sigma)^3(x, y, 0) = (y^2, x^2, 0)$$

e, essendo  $(y^2, x^2, 0)$  proporzionale a  $(x, y, 0) = xy(y^2, x^2, 0)$ ,

$$(\varepsilon_1\sigma)^3(p_i) = p_i.$$

Allora  $(\varepsilon_1\sigma)^3$   $\acute{e}$  l'identit $\grave{a}$  e quindi appartiene a  $G$ . In modo analogo si pu $\acute{o}$  controllare che  $\varepsilon_1^2$   $\acute{e}$  l'identit $\grave{a}$  e cos $\acute{i}$  resta provata la (3) della 2.4.4.

Per finire, proviamo la (4) della 2.4.4 e cio $\acute{e}$  che

$$\varepsilon_1 G_{p_1} \varepsilon_1 = G_{p_1}.$$

A tale scopo, cominciamo con l'osservare che un elemento  $\tau \in G_{p_1}$   $\acute{e}$  un elemento di  $G$  che fissa  $p_1 = (1, 0, 0)$  e quindi  $\acute{e}$  rappresentato da una matrice del tipo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{bmatrix},$$

con

$$\det(T) = bf + ec = 1;$$

inoltre,  $\varepsilon_1\tau\varepsilon_1$   $\acute{e}$  una permutazione di  $X$  che fissa  $p$ . Ora, se  $(x, y, t) \neq (0, 0, 0)$ , abbiamo

$$\varepsilon_1(x, y, t) = (x^2 + yt, y^2, t^2),$$

$$\tau(\varepsilon_1(x, y, t)) = (x^2 + yt + ay^2 + dt^2, by^2 + et^2, cy^2 + ft^2),$$

$$\varepsilon_1(\tau(\varepsilon_1(x, y, t))) = (x + y(a^2 + bc) + t(d^2 + ef), b^2y + e^2t, c^2y + f^2t),$$

cio $\acute{e}$   $\varepsilon_1\tau\varepsilon_1$   $\acute{e}$  la funzione rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 + bc & d^2 + ef \\ 0 & b^2 & e^2 \\ 0 & c^2 & f^2 \end{bmatrix}$$

e, essendo

$$\det(A) = b^2f^2 + e^2c^2 = (bf + ec)^2 = \det(T)^2 = 1,$$

ricaviamo che  $\varepsilon_1\tau\varepsilon_1$   $\acute{e}$  un elemento di  $G_{p_1}$ . Resta cos $\acute{i}$  provato che

$$\varepsilon_1 G_{p_1} \varepsilon_1 \subseteq G_{p_1}.$$

D'altra parte, se  $\tau$  é un elemento di  $G_{p_1}$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \tau^{-1} \varepsilon_1 \in G_{p_1} &\Rightarrow \varepsilon_1^{-1} \tau \varepsilon_1^{-1} = (\varepsilon_1 \tau^{-1} \varepsilon_1)^{-1} \in G_{p_1} \Rightarrow \\ &\tau = \varepsilon_1 (\varepsilon_1^{-1} \tau \varepsilon_1^{-1}) \varepsilon_1,\end{aligned}$$

cioé

$$\varepsilon_1 G_{p_1} \varepsilon_1 \supseteq G_{p_1}$$

e quindi

$$\varepsilon_1 G_{p_1} \varepsilon_1 = G_{p_1}.$$

Concludendo, in forza della 2.4.4, il gruppo  $\langle G, \varepsilon_1 \rangle$  é un'estensione di  $G$ , come volevamo dimostrare.  $\square$

Il gruppo  $\langle PSL(3, 4), \varepsilon_1 \rangle$ , estensione di  $PSL(3, 4)$ , si denota col simbolo  $M_{22}$  e ha un'azione 3-transitiva su un insieme di ventidue elementi. Tale azione non é 4-transitiva, altrimenti  $PSL(3, 4)$  sarebbe 3-transitivo sui punti di  $PG(2, 4)$  e ciò non é vero.

**PROPOSIZIONE 12.3.2.** *Il gruppo  $M_{22}$ , nella sua azione 3-transitiva su un insieme con ventidue elementi, ha un'estensione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri la permutazione  $\eta_2$  su  $X$  definita da

$$\eta_2(x, y, t) = (x^2, y^2, gt^2),$$

ove  $g$  é un elemento primitivo di  $GF(4)$ . Si definisca poi una permutazione  $\varepsilon_2$  su  $Z = Y \cup \{\bar{p}\}$ ,  $\bar{p} \notin Y$ , come prodotto di  $\eta_2$  e della trasposizione  $(p, \bar{p})$ . A questo punto, con argomentazioni analoghe a quelle della dimostrazione precedente, si ottiene che  $\langle M_{22}, \varepsilon_2 \rangle$  é un'estensione di  $M_{22}$ .  $\square$

Il gruppo  $\langle M_{22}, \varepsilon_2 \rangle$ , estensione di  $M_{22}$ , si denota con  $M_{23}$  e ha un'azione 4-transitiva su un insieme con ventitré elementi e tale azione non é 5-transitiva.

**PROPOSIZIONE 12.3.3.** *Il gruppo  $M_{23}$ , nella sua azione 4-transitiva su un insieme con ventitré elementi, ha un'estensione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri la permutazione  $\eta_3$  su  $X$  definita da

$$\eta_3(x, y, t) = (x^2, y^2, t^2).$$

Si definisca poi una permutazione  $\varepsilon_3$  su  $T = Z \cup \{\bar{\bar{p}}\}$ ,  $\bar{\bar{p}} \notin Z$ , come prodotto di  $\eta_3$  e della trasposizione  $(\bar{p}, \bar{\bar{p}})$ . A questo punto, con argomentazioni analoghe a quelle della proposizione 12.3.1, si ottiene che  $\langle M_{23}, \varepsilon_3 \rangle$  é un'estensione di  $M_{23}$ .  $\square$

Il gruppo  $\langle M_{23}, \varepsilon_3 \rangle$ , estensione di  $M_{23}$ , si denota con  $M_{24}$  e ha un'azione 5-transitiva su un insieme con ventiquattro elementi e tale azione non é 6-transitiva.

I gruppi  $M_{22}, M_{23}, M_{24}$  prendono il nome di *grandi gruppi di Mathieu*.

**PROPOSIZIONE 12.3.4.** *I tre grandi gruppi di Mathieu sono semplici.*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $M_{22}$  non sia semplice e osserviamo che la sua azione 3-transitiva su ventitré elementi é fedele. Poiché  $PSL(2, 4)$  é uno stabilizzatore puntuale semplice di  $M_{22}$ , per la 2.5.4, ogni sottogruppo normale non banale  $N$  di  $M_{22}$  deve essere regolare su  $Y$  e quindi deve avere ordine 22. Allora, per la 2.5.8 deve essere

$$N \sim \begin{cases} Z_2^m & \text{con } m > 0 \\ \text{oppure} \\ Z_3 \end{cases}$$

il che é evidentemente assurdo. Allo stesso modo si prova la semplicitá di  $M_{23}$  e  $M_{24}$ .  $\square$

Esistono altri due gruppi di Mathieu, detti *piccoli gruppi di Mathieu*, che sono semplici e si denotano con  $M_{11}$  e  $M_{12}$ . Essi sono rispettivamente 4-transitivi e 5-transitivi su insiemi con 11 e 12 elementi e, con procedimenti analoghi a quelli visti nel presente paragrafo, possono costruirsi come successive estensioni di un gruppo 2-transitivo di automorfismi del piano affine  $AG(2, 3)$ .

## 12.4 I disegni di Mathieu

Come applicazione della 12.1.4 diamo una costruzione dei cosiddetti *grandi disegni di Mathieu*. A tale scopo sia  $\mathcal{P}$  l'insieme dei punti di  $PG(2, 4)$  e  $p_{22}$  un punto non appartenente a  $\mathcal{P}$ . Posto  $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{p_{22}\}$ , ricordiamo che il gruppo  $G = PSL(3, 4)$ , nella sua azione 2-transitiva su  $\mathcal{P}$ , ammette come estensione il gruppo di Mathieu  $G^1 = M_{22} = \langle G, \varepsilon_1 \rangle$ , che a sua volta é 3-transitivo su  $\mathcal{P}^+$ . Denotate con  $(x, y, t)$  le coordinate di un punto di  $PG(2, 4)$  in un fissato riferimento proiettivo, sia  $L = ab$  la retta di equazione  $t = 0$ ,  $a = (1, 0, 0)$  e poniamo

$$B = L \cup \{p_{22}\}.$$

Possiamo allora considerare il 3-(22, 6,  $\lambda$ ) disegno  $\mathbf{D}(\mathcal{P}^+, G^1, B)$ , che denotiamo con  $\mathcal{M}_{22}$ , per il quale  $G^1$  é un gruppo di automorfismi 3-transitivo sui punti e transitivo sui blocchi. Osserviamo che il reticolo dei sottogruppi di  $G^1$  contiene la catena

$$M_{22} = G^1 \geq G_B^1 \geq G_L.$$

Osserviamo ancora che lo stabilizzatore  $G_B^1$  di  $B$  in  $G^1$  é transitivo sui punti di  $B$  perché  $G_B^1$  contiene  $\varepsilon_1$  (cfr. dimostrazione della 12.3.1), che scambia tra loro  $p_{22}$  e  $(1, 0, 0)$  e contiene anche lo stabilizzatore  $G_L$  di  $L$  in  $PSL(3, 4)$ , che é 2-transitivo su  $L$ . Cosí l'orbita  $G_B^1(p_{22})$  di  $p_{22}$  in  $G_B^1$  coincide con  $B$  e quindi risulta

$$|G_B^1(p_{22})| = |G_B^1 : (G_B^1)_{p_{22}}| = |G_B^1 : G_L| = |B| = 6.$$

Quest'ultima osservazione permette di calcolare il numero  $b$  dei blocchi di  $\mathcal{M}_{22}$ . Si ha infatti

$$b = |G^1(B)| = |G^1 : G_B^1| = \frac{|G^1 : G_L|}{|G_B^1 : G_L|} =$$

$$\frac{|G^1 : G||G : G_L|}{|G_B^1 : G_L|} = \frac{22 \cdot 21}{6} = 77.$$

A questo punto, usando la 10.1 , abbiamo

$$\begin{aligned}\lambda_1 = r &= \frac{bk}{v} = \frac{77 \cdot 6}{22} = 21, \\ \lambda_2 &= \frac{(k-1)\lambda_1}{v-1} = \frac{5 \cdot 21}{21} = 5, \\ \lambda = \lambda_3 &= \frac{(k-2)\lambda_2}{v-2} = \frac{4 \cdot 5}{20} = 1\end{aligned}$$

e cosí , in forza della 12.1.4 , resta provata la seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 12.4.1.** *Il piano proiettivo  $PG(2, 4)$  é estendibile in un  $3 - (22, 6, 1)$  disegno  $\mathcal{M}_{22}$ . Inoltre  $\mathcal{M}_{22}$  ammette il gruppo di Mathieu  $M_{22}$  come gruppo di automorfismi 3-transitivo sui punti e transitivo sui blocchi.*

Mantenendo le notazioni usate nella dimostrazione della proposizione precedente e con analogo procedimento si provano le due seguenti proposizioni.

**PROPOSIZIONE 12.4.2.** *Siano  $\mathcal{P}^{++} = \mathcal{P}^+ \cup \{p_{23}\}$  con  $p_{23} \notin \mathcal{P}^+$ , e  $B' = B \cup \{p_{23}\}$ . Allora  $\mathcal{M}_{22}$  é estendibile in un  $4 - (23, 7, 1)$  disegno  $\mathcal{M}_{23} = \mathbf{D}(\mathcal{P}^{++}, M_{23}, B')$ . Inoltre  $\mathcal{M}_{23}$  ammette il gruppo di Mathieu  $M_{23}$  come gruppo di automorfismi 4-transitivo sui punti e transitivo sui blocchi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Posto  $G^2 = M_{23}$ , il reticolo dei sottogruppi di  $G^2$  contiene la catena

$$G^2 \geq G_{B'}^2 \geq (G_{B'}^2)_{p_{23}} = G_B^1 \geq G_L.$$

Osserviamo che lo stabilizzatore di  $B'$  in  $M_{23}$  é transitivo su  $B'$  perché contiene  $\varepsilon_2$ ; pertanto abbiamo

$$|G_{B'}^2(p_{23})| = |G_{B'}^2 : (G_{B'}^2)_{p_{23}}| = |G_{B'}^2 : G_B^1| = |B'| = 7$$

e cosí per il numero  $b$  dei blocchi di  $\mathcal{M}_{23}$ , abbiamo

$$\begin{aligned}b = |G^2(B')| &= |G^2 : G_{B'}^2| = \frac{|G^2 : G_B^1|}{|G_{B'}^2 : G_B^1|} = \\ &= \frac{|G^2 : G^1||G^1 : G_B^1|}{|G_{B'}^2 : G_B^1|} = \frac{23 \cdot 77}{7} = 23 \cdot 11.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\lambda_1 = r &= \frac{bk}{v} = \frac{23 \cdot 11 \cdot 7}{23} = 11 \cdot 7, \\ \lambda_2 &= \frac{(k-1)\lambda_1}{v-1} = \frac{6 \cdot 11 \cdot 7}{22} = 3 \cdot 7,\end{aligned}$$

$$\lambda_3 = \frac{(k-2)\lambda_2}{v-2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 7}{21} = 5,$$

$$\lambda = \lambda_4 = \frac{(k-3)\lambda_3}{v-3} = \frac{4 \cdot 5}{20} = 1,$$

e l'asserto é provato.  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.4.3.** *Siano  $\mathcal{P}^{+++} = \mathcal{P}^{++} \cup \{p_{24}\}$  con  $p_{24} \notin \mathcal{P}^{++}$ , e  $B'' = B' \cup \{p_{24}\}$ . Allora  $\mathcal{M}_{23}$  é estendibile in un  $5 - (24, 8, 1)$  disegno  $\mathcal{M}_{24} = \mathbf{D}(\mathcal{P}^{+++}, M_{24}, B'')$ . Inoltre  $\mathcal{M}_{24}$  non é estendibile e ammette il gruppo di Mathieu  $M_{24}$  come gruppo di automorfismi  $5$ -transitivo sui punti e transitivo sui blocchi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Posto  $G^3 = M_{24}$ , il reticolo dei sottogruppi di  $G^3$  contiene la seguente catena

$$G^3 \geq G_{B''}^3 \geq (G_{B''}^3)_{p_{24}} = G_{B'}^2 \geq G'_B \geq G_L.$$

Osserviamo che lo stabilizzatore di  $B''$  in  $M_{24}$  é transitivo su  $B''$  perché contiene  $\varepsilon_3$ ; pertanto abbiamo

$$|G_{B''}^3(p_{24})| = |G_{B''}^3 : (G_{B''}^3)_{p_{24}}| = |G_{B''}^3 : G_{B'}^2| = |B''| = 8$$

e cosí per il numero  $b$  dei blocchi di  $\mathcal{M}_{24}$ , abbiamo

$$b = |G^3(B'')| = |G^3 : G_{B''}^3| = \frac{|G^3 : G_{B'}^2|}{|G_{B''}^3 : G_{B'}^2|} =$$

$$\frac{|G^3 : G^2| |G^2 : G_{B'}^2|}{|G_{B''}^3 : G_{B'}^2|} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 11}{8} = 23 \cdot 11 \cdot 3.$$

Ne segue che

$$\lambda_1 = r = \frac{bk}{v} = \frac{23 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 8}{24} = 23 \cdot 11,$$

$$\lambda_2 = \frac{(k-1)\lambda_1}{v-1} = \frac{7 \cdot 23 \cdot 11}{23} = 7 \cdot 11,$$

$$\lambda_3 = \frac{(k-2)\lambda_2}{v-2} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 11}{22} = 21,$$

$$\lambda_4 = \frac{(k-3)\lambda_3}{v-3} = \frac{5 \cdot 21}{21} = 5,$$

$$\lambda = \lambda_5 = \frac{(k-4)\lambda_4}{v-4} = \frac{4 \cdot 5}{20} = 1,$$

e cosí  $\mathcal{M}_{24}$  é estensione di  $\mathcal{M}_{23}$ . Infine, poiché per  $\mathcal{M}_{24}$  non é verificata la condizione della 12.1.1,  $\mathcal{M}_{24}$  non é estendibile.  $\square$

I disegni  $\mathcal{M}_{22}, \mathcal{M}_{23}, \mathcal{M}_{24}$  prendono il nome di *grandi disegni di Mathieu*. Osserviamo che, con costruzioni analoghe a quelle usate nel presente paragrafo, é possibile costruire i cosiddetti *piccoli disegni di Mathieu* che sono: (i) un  $4 - (11, 5, 1)$  disegno che ha  $M_{11}$  come gruppo di automorfismi  $4$ -transitivo sui punti e transitivo sui blocchi, un  $5 - (12, 6, 1)$  disegno che ha  $M_{12}$  come gruppo di automorfismi  $5$ -transitivo sui punti e transitivo sui blocchi.

## 12.5 Geometria e unicità dei grandi disegni di Mathieu

Nel paragrafo precedente abbiamo costruito i grandi Disegni di Mathieu servendoci del metodo descritto in 12.1.4 con l'azione altamente transitiva dei gruppi di Mathieu. Ci proponiamo adesso di dare una loro descrizione geometrica. Ciò, tra l'altro, ci permetterà di provare una delle più interessanti e inaspettate proprietà di questi disegni:  $\mathcal{M}_{22}$ ,  $\mathcal{M}_{23}$ ,  $\mathcal{M}_{24}$  sono completamente individuati dai loro parametri, a meno di isomorfismi.

**PROPOSIZIONE 12.5.1.** *Sia  $\mathcal{W}_{22} = (\mathcal{P}^+, \mathcal{B}_{22})$  un  $3 - (22, 6, 1)$  disegno. Allora risulta*

$$\lambda_1^+ = \lambda_1 = 21, \quad \lambda_2^+ = \lambda_2 = 5 \text{ e } b^+ = b = 77 \quad (12.3)$$

e due suoi blocchi distinti si intersecano esattamente in 0 o in 2 punti. Inoltre, per ogni punto  $p_j \in \mathcal{P}^+$  il derivato  $(\mathcal{W}_{22})_{p_j}$  è isomorfo a  $PG(2, 4)$  e l'insieme dei blocchi di  $\mathcal{W}_{22}$  è del tipo

$$\mathcal{B}_{22} = \mathcal{B}(p_j) \cup \mathbf{O}_i \quad (12.4)$$

dove  $\mathbf{O}_i$  è una famiglia di 56 iperovali di  $PG(2, 4)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La 12.3 segue dalle 10.1 e 10.4. Il disegno  $(\mathcal{W}_{22})_{p_j}$  è un  $2 - (21, 5, 1)$  disegno simmetrico e quindi, essendo un piano proiettivo d'ordine 4, è necessariamente isomorfo a  $PG(2, 4)$ .

Se due blocchi  $B$  e  $B'$  di  $\mathcal{W}_{22}$  hanno un punto  $p$  in comune, allora  $B \setminus \{p\}$  e  $B' \setminus \{p\}$  sono due rette di  $(\mathcal{W}_{22})_p = PG(2, 4)$  e quindi s'intersecano in un ulteriore punto. Ne segue che un blocco  $B$  non contenente  $p_j$  è un insieme di 6 punti di  $(\mathcal{W}_{22})_{p_j} = PG(2, 4)$  a tre a tre non allineati, cioè un'iperovale. Infine risulta

$$|\mathbf{O}_i| = |\mathcal{B}_{22}| - |\mathcal{B}(p_j)| = 77 - 21 = 56$$

e l'asserto è completamente provato. □

**PROPOSIZIONE 12.5.2.** *Sia  $\mathcal{B}^+$  l'insieme dei blocchi di  $\mathcal{M}_{22}$ . Allora risulta*

$$\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}(p_{22}) \cup \Theta_i,$$

ove  $\Theta_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , è un'orbita completa di iperovali di  $PG(2, 4)$  sotto l'azione di  $PSL(3, 4)$ . Inoltre, se  $\Theta_i \neq \Theta_j$ , allora

$$\mathcal{W}_{22}[j] = (\mathcal{P}^+, \mathcal{B}' = \mathcal{B}(p_{22}) \cup \Theta_j)$$

è un  $3 - (22, 6, 1)$  disegno isomorfo a  $\mathcal{M}_{22}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** In forza della 12.5.1 i 56 blocchi di  $\mathcal{B}^+$  sono iperovali del piano e, poiché

$$\mathcal{B}^+ = G^+(\mathcal{B}^+) = \{\sigma(\mathcal{B}^+) : \sigma \in M_{22}\},$$

questo deve contenere un'orbita completa di iperovali di  $PG(2, 4)$  sotto l'azione di  $PSL(3, 4)$ . D'altra parte, una tale orbita ha ordine 56 e così le 56 iperovali contenute in  $\mathcal{B}^+$  costituiscono un'orbita completa.

Detta  $\omega$  una omografia che trasforma un'iperovale di  $\Theta_i$  in una di  $\Theta_j$ , la permutazione  $\omega'$  di  $\mathcal{P}^+$ , definita da

$$\omega'(p_i) = \begin{cases} \omega(p_i) & \text{se } i \neq 22 \\ p_{22} & \text{se } i = 22 \end{cases}$$

trasforma  $\mathcal{B}^+$  in  $\mathcal{B}'$ , cioè la seconda parte dell'asserto.  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.5.3.** *Se  $\mathcal{W}_{23} = (\mathcal{P}^{++}, \mathcal{B}_{23})$  è un  $4 - (23, 7, 1)$  disegno, risulta*

$$\lambda_1^{++} = \lambda_1 = 11 \cdot 7, \quad \lambda_2^{++} = \lambda_2 = 21, \quad \lambda_3^{++} = \lambda_3 = 5 \text{ e } b^{++} = b = 23 \cdot 11 \quad (12.5)$$

e due suoi blocchi distinti si intersecano esattamente in 1 o in 3 punti. Inoltre, per ogni due punti distinti  $p_s$  e  $p_t$  di  $\mathcal{P}^{++}$ ,  $(\mathcal{W}_{23})_{p_s}$  è un  $\mathcal{W}_{22}$ ,  $(\mathcal{W}_{23})_{p_s p_t}$  è isomorfo a  $PG(2, 4)$  e l'insieme dei blocchi di  $\mathcal{W}_{23}$  è del tipo

$$\mathcal{B}_{23} = \mathcal{B}(p_s, p_t) \cup \mathbf{O}_i(p_s) \cup \mathbf{O}_j(p_t) \cup S, \quad (12.6)$$

ove  $\mathbf{O}_i$  e  $\mathbf{O}_s$  sono due insiemi disgiunti, ciascuno formato da 56 iperovali, e  $S$  è un insieme di 120 sottopiani di Baer di  $PG(2, 4)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La 12.5 segue dalle 10.1 e 10.4.  $(\mathcal{W}_{23})_{p_s}$  è un  $3 - (22, 6, 1)$  disegno, cioè un  $\mathcal{W}_{22}$  e quindi, in forza della 12.5.1,  $(\mathcal{W}_{23})_{p_s p_t}$  è isomorfo a  $PG(2, 4)$ .

Se due blocchi  $B$  e  $B'$  hanno un punto  $p$  in comune, allora  $B \setminus \{p\}$  e  $B' \setminus \{p\}$  sono due blocchi di  $\mathcal{W}_{22} = (\mathcal{W}_{23})_p$ , quindi  $|(B \setminus \{p\}) \cap (B' \setminus \{p\})| = 0, 2$  e cioè  $|B \cap B'| = 1, 3$ . Ora osserviamo che il numero  $\nu$  dei blocchi di  $\mathcal{W}_{23}$  incidenti  $B$  è uguale a  $b^{++}$ ; infatti per il principio di inclusione-esclusione abbiamo

$$\nu = 1 + (\lambda_1^{++} - 1)7 - (\lambda_2^{++} - 1)21 + (\lambda_3^{++} - 1)35 = b^{++}.$$

Ne segue che due blocchi di  $\mathcal{W}_{23}$  non possono essere disgiunti.

Sia  $S$  l'insieme dei blocchi di  $\mathcal{W}_{23}$  disgiunti da  $\{p_s, p_t\}$  e  $B$  un elemento di  $S$ . Allora  $B$  è un insieme di 7 punti di  $PG(2, 4) = (\mathcal{W}_{23})_{p_s p_t}$  intersecato da ogni retta in 1 o 3 punti, cioè è un sottopiano di Baer di  $PG(2, 4)$ . Dalla 12.4 segue allora facilmente la 12.6.

Infine risulta

$$|S| = |\mathcal{B}(\mathcal{W}_{23})| - |\mathcal{B}(p_s, p_t)| - |\mathbf{O}_i(p_s)| - |\mathbf{O}_j(p_t)| = 23 \cdot 11 - 21 - 2 \cdot 56 = 120$$

e l'asserto è completamente provato.  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.5.4.** *Sia  $\mathcal{B}^{++}$  l'insieme dei blocchi di  $\mathcal{M}_{23}$ . Allora risulta*

$$\mathcal{B}^{++} = \mathcal{B}(p_{22}, p_{23}) \cup \Theta_i(p_{22}) \cup \Theta_j(p_{23}) \cup \Pi_s,$$

ove  $\Theta_i$  e  $\Theta_j$  sono orbite distinte di iperovali,  $\Pi_s$  è un'orbita di sottopiani di Baer di  $PG(2, 4)$  sotto l'azione di  $PSL(3, 4)$ , con  $\{i, j, s\} = \{1, 2, 3\}$ . Inoltre, se  $\{i', j', s'\} = \{1, 2, 3\}$ , posto

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B}(p_{22}, p_{23}) \cup \Theta_{i'}(p_{22}) \cup \Theta_{j'}(p_{23}) \cup \Pi'_s,$$

si ha che

$$\mathcal{W}_{23}(i', j') = (\mathcal{P}^{++}, B'')$$

é un  $4 - (23, 7, 1)$  disegno isomorfo a  $\mathcal{M}_{23}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La prima parte dell'asserto segue dalle 7.4.7, 7.4.8, 7.4.9, 12.5.2 e dall'essere  $M_{23}$  un gruppo di automorfismi di  $\mathcal{M}_{23}$  transitivo sui blocchi e  $PSL(3, 4) = (M_{23})_{p_2 p_3}$ .

Per provare la seconda parte é sufficiente osservare che una proiettività  $\omega$  di  $PG(2, 4)$  di tipo  $(i, j, s, i', j', s')$ , con procedimento analogo a quello usato nel corso della 12.5.2, può sempre essere estesa ad una permutazione di  $\mathcal{P}^{++}$  che trasforma  $B^{++}$  in  $B''$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.5.5.** Se  $\mathcal{W}_{24} = (\mathcal{P}^{+++}, \mathcal{B}_{24})$  é un  $5 - (24, 8, 1)$  disegno, risulta

$$\lambda_1^{+++} = \lambda_1 = 253, \quad \lambda_2^{+++} = \lambda_2 = 77, \quad \lambda_3^{+++} = \lambda_3 = 21 \quad (12.7)$$

$$\lambda_4^{+++} = \lambda_4 = 5 \text{ e } b^{+++} = b = 759$$

e due suoi blocchi distinti si intersecano esattamente in 0, 2, o 4 punti. Inoltre, per ogni tre punti a due a due distinti  $p_s, p_t, p_m$  di  $\mathcal{W}_{24}$  si ha:

$(\mathcal{W}_{24})_{p_s}$  é un  $\mathcal{W}_{23}$ ,

$(\mathcal{W}_{24})_{p_s p_t}$  é un  $\mathcal{W}_{22}$ ,

$(\mathcal{W}_{24})_{p_s p_t p_m}$  é isomorfo a  $PG(2, 4)$

e l'insieme dei blocchi di  $\mathcal{W}_{24}$  é del tipo

$$\mathcal{B}_{24} = \mathcal{B}(p_s, p_t, p_m) \cup \mathbf{O}_1(p_s, p_t) \cup \mathbf{O}_2(p_t, p_m) \cup \mathbf{O}_3(p_m, p_s) \cup \quad (12.8)$$

$$S_1(p_m) \cup S_2(p_s) \cup S_3(p_t) \cup D,$$

ove

- $\{\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3\}$  é una partizione dell'insieme di tutte le iperovali di  $PG(2, 4) = (\mathcal{W}_{24})_{p_s p_t p_m}$  in tre classi di 56 elementi ciascuna e due iperovali della stessa classe s'intersecano in un numero pari di punti,
- $\{S_1, S_2, S_3\}$  é una partizione dell'insieme di tutti i sottopiani di Baer di  $PG(2, 4)$  in tre classi di 120 elementi ciascuna e due sottopiani della stessa classe s'intersecano in un numero dispari di punti,
- $D$  é l'insieme delle differenze simmetriche di tutte le coppie di rette distinte di  $PG(2, 4)$ .

Infine, un quadrangolo  $Q$  di  $PG(2, 4)$  é contenuto in un'iperovale della classe  $\Theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se, e soltanto se, l'unico sottopiano di Baer che lo contiene é contenuto nella classe  $S_i$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La 12.7 segue dalle 10.1 e 10.4.  $(\mathcal{W}_{24})_{p_s}$  é un  $4 - (23, 7, 1)$  disegno, cioè un  $\mathcal{W}_{23}$  e quindi, in forza della 12.5.3,  $(\mathcal{W}_{24})_{p_s p_t}$  é un  $\mathcal{W}_{22}$  e  $(\mathcal{W}_{24})_{p_s p_t p_m}$  é isomorfo a  $PG(2, 4)$ .

Se due blocchi  $B$  e  $B'$  hanno un punto  $p$  in comune, allora  $B \setminus \{p\}$  e  $B' \setminus \{p\}$  sono due blocchi di  $\mathcal{W}_{23} = (\mathcal{W}_{24})_p$ , quindi  $|(B \setminus \{p\}) \cap (B' \setminus \{p\})| = 1, 3$  e cioè  $|B \cap B'| = 2, 4$ .

Sia  $\mathcal{D}$  l'insieme dei blocchi di  $\mathcal{W}_{24}$  disgiunti da  $\{p_s, p_t, p_m\}$  e  $B$  un elemento di  $\mathcal{D}$ . Allora  $B$  é un insieme di 8 punti di  $PG(2, 4) = (W_{24})_{p_s p_t p_m}$  intersecato da ogni retta in 0, 2 o 4 punti e non é difficile verificare che un insieme con questa proprietá é la differenza simmetrica di due rette distinte.

Dalla 12.6 segue che  $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3$  sono tre insiemi di iperovali di 56 elementi ciascuno e a due a due disgiunti e che  $S_1, S_2, S_3$  sono tre insiemi di sottopiani di Baer di 120 elementi ciascuno e a due a due disgiunti. Allora dalla 7.4.6 abbiamo la 12.8.

Infine, se per esempio un quadrangolo  $Q$  fosse contenuto in un'iperovale  $\Omega$  della classe  $\mathbf{O}_1$  e in un sottopiano  $\pi$  della classe  $S_2$ , allora

$$B = \Omega \cup \{p_s, p_t\} \text{ e } B' = \pi \cup \{p_s\}$$

sarebbero due blocchi di  $\mathcal{W}_{24}$  con esattamente 5 punti in comune e ció é assurdo.  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.5.6.** *Sia  $B^{+++}$  l'insieme dei blocchi di  $\mathcal{M}_{24}$ . Allora risulta*

$$B^{+++} = \mathcal{B}(p_{22}, p_{23}, p_{24}) \cup \Theta_i(p_{22}, p_{23}) \cup \Theta_j(p_{23}, p_{24}) \cup$$

$$\Theta_h(p_{24}, p_{22}) \cup \Pi_i(p_{24}) \cup \Pi_j(p_{22}) \cup \Pi_h(p_{23}) \cup D,$$

ove  $\{i, j, h\} = \{1, 2, 3\}$  e

- $\Theta_i, \Theta_j, \Theta_h$  sono le tre orbite di iperovali di  $PG(2, 4)$  sotto l'azione di  $PSL(3, 4)$ ,
- $\Pi_i, \Pi_j, \Pi_h$  sono le tre orbite di sottopiani di Baer di  $PG(2, 4)$  sotto l'azione di  $PSL(3, 4)$ ,
- $D$  é l'insieme delle differenze simmetriche di tutte le coppie di rette distinte di  $PG(2, 4)$ .

Inoltre, se  $\{i', j', s'\} = \{1, 2, 3\}$ , posto

$$B''' = \mathcal{B}(p_{22}, p_{23}, p_{24}) \cup \Theta_{i'}(p_{22}, p_{23}) \cup \Theta_{j'}(p_{23}, p_{24}) \cup$$

$$\Theta_{s'}(p_{24}, p_{22}) \cup \Pi_{i'}(p_{24}) \cup \Pi_{j'}(p_{22}) \cup \Pi_{s'}(p_{23}) \cup D,$$

si ha che

$$\mathcal{W}_{24}(i', j', s') = (\mathcal{P}^{+++}, B''')$$

é un  $5 - (24, 8, 1)$  disegno isomorfo a  $\mathcal{M}_{24}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La prima parte dell'asserto segue dalle 7.4.7, 7.4.8, 7.4.9, 12.5.5 e dall'essere  $\mathcal{M}_{24}$  un gruppo di automorfismi di  $\mathcal{M}_{24}$  transitivo sui blocchi e  $PSL(3, 4) = (\mathcal{M}_{24})_{p_{22}p_{23}p_{24}}$ .

Per provare la seconda parte é sufficiente osservare che una proiettivitá  $\omega$  di  $PG(2, 4)$  di tipo  $(i, j, s, i', j', s')$  puó essere sempre estesa ad una permutazione di  $\mathcal{P}^{+++}$  che trasforma  $B^{+++}$  in  $B'''$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.5.7.** *Due iperovali  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  di  $PG(2, 4)$  appartengono ad una stessa orbita di  $PSL(3, 4)$  se, e soltanto se, l'ordine di  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  é pari.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se le iperovali  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  appartengono alla stessa orbita  $\Theta_i$ , esse costituiscono due blocchi del disegno  $\mathcal{W}_{22}(i)$ , così come definito nella 12.5.2 e quindi si intersecano in 0, 2 o 6 punti. Facciamo ora vedere che, se  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  appartengono a due orbite distinte di  $PSL(3, 4)$ , allora l'ordine di  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  è dispari. Supponiamo dunque  $\Omega_1 \in \Theta_i$  e  $\Omega_2 \in \Theta_j$ , con  $i \neq j$ . Gli insiemi  $\Omega_1 \cup \{p_{23}, p_{24}\}$  e  $\Omega_2 \cup \{p_{22}, p_{24}\}$  sono allora due blocchi del disegno  $\mathcal{W}_{24}(i, j, s)$ , così come definito nella 12.5.6, e quindi si intersecano in 2 o 4 punti. Da ciò segue che  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  si intersecano in 1 o 3 punti.  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.5.8.** *Due sottopiani di Baer  $\pi_1$  e  $\pi_2$  di  $PG(2, 4)$  appartengono ad una stessa orbita di  $PSL(3, 4)$  se, e solo se, l'ordine di  $\pi_1 \cap \pi_2$  è dispari.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  appartengono alla stessa orbita  $\Pi_s$  di  $PSL(3, 4)$ , essi costituiscono due blocchi del disegno  $\mathcal{W}_{23}(i, j)$  con  $\{i, j, s\} = \{1, 2, 3\}$  e quindi si intersecano in 1, 3 o 7 punti. Facciamo ora vedere che, se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  appartengono a orbite distinte, allora l'ordine di  $\pi_1 \cap \pi_2$  è pari. Supponiamo dunque che  $\pi_1 \in \Pi_i$  e  $\pi_2 \in \Pi_j$  con  $i \neq j$ . In questa ipotesi gli insiemi  $\pi_1 \cup \{p_{22}\}$  e  $\pi_2 \cup \{p_{23}\}$  sono due blocchi del disegno  $\mathcal{W}_{24}(i, j, s)$  con  $\{i, j, s\} = \{1, 2, 3\}$  e quindi si intersecano in 0, 2 o 4 punti. Da ciò segue che l'ordine di  $\pi_1 \cap \pi_2$  è pari.  $\square$

**PROPOSIZIONE 12.5.9.** *A meno di isomorfismi  $\mathcal{M}_{22}$  è l'unico 3 – (22, 6, 1) disegno,  $\mathcal{M}_{23}$  è l'unico 4 – (23, 7, 1) disegno e  $\mathcal{M}_{24}$  è l'unico 5 – (24, 8, 1) disegno.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathcal{W}_{22}$  è un 3 – (22, 6, 1) disegno, per la 12.5.1, l'insieme dei suoi blocchi è del tipo

$$\mathcal{B}(p_i) \cup \mathbf{O}_i,$$

dove  $\mathbf{O}_i$  è una famiglia di 56 iperovali di  $PG(2, 4)$ . Inoltre, due blocchi di  $\mathcal{W}_{22}$  si intersecano in 0, 2 o 6 punti. Da questo segue per la 12.5.8 che  $\mathbf{O}_i$  è un'orbita di iperovali di  $PG(2, 4)$  sotto l'azione di  $PSL(3, 4)$  e quindi  $\mathcal{W}_{22}$ , essendo un  $\mathcal{W}_{22}(i)$  con  $i = 1, 2, 3$ , per la 12.5.2 è isomorfo a  $\mathcal{M}_{22}$ . In maniera del tutto analoga si procede per provare che un  $\mathcal{W}_{23}$  e un  $\mathcal{W}_{24}$  sono rispettivamente isomorfi a  $\mathcal{M}_{23}$  e a  $\mathcal{M}_{24}$ .  $\square$