Capitolo 11

Disegni simmetrici

11.1 Prime proprietá

Questo paragrafo é dedicato allo studio di alcune proprietá generali dei disegni simmetrici, cioé i disegni per cui é $v = b$.

Proposizione 11.1.1. *Se* $\mathbf{D}$ *é un* $t - (v, k, \lambda)$ *disegno simmetrico non banale con* $t > 1$, *allora é* $t = 2$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathbf{D}$ sia un $t - (v, k, \lambda)$ disegno simmetrico non banale. Se, per assurdo, t fosse diverso da 2, fissato un punto $x \in \mathcal{P}$, il disegno derivato $\mathbf{D}_x$, sarebbe un $(t-1) - (v-1, k-1, \lambda)$ disegno non banale con $t-1 > 1$. Allora, per la diseguaglianza di Fisher, il numero r di blocchi di $\mathbf{D}_x$ dovrebbe essere maggiore o uguale di $v - 1$. D'altra parte, dalla (10.4) e da $b = v$ ricaviamo $r = k$, quindi

$$k \geq v - 1 \Rightarrow v - k \leq 1.$$

Allora deve essere $k = v$ o $k = v - 1$ e nel primo caso si ottiene un disegno banale, il che é assurdo. Nel secondo caso, i blocchi di $\mathbf{D}$ hanno ordine $v - 1$ e sono in numero di $b = v$, cioé il numero di tutti i sottoinsiemi con $v-1$ punti. Ne segue che $\mathcal{B}$ é la famiglia di tutti i sottoinsiemi con $v - 1$ punti; dunque $\mathbf{D}$ é banale e abbiamo ancora un assurdo. $\square$

Diamo ora delle caratterizzazioni dei 2−disegni simmetrici.

Proposizione 11.1.2. *Un* $2 - (v, k, \lambda)$ *disegno* $\mathbf{D}$, *con* $v > k$, *é simmetrico se, e soltanto se, vale una delle seguenti condizioni:*

(1) $r = k$;

(2) due blocchi distinti si intersecano esattamente in λ *punti;*

(3) due blocchi distinti si intersecano in un numero costante di punti.

Dimostrazione. In forza della (10.4), l'essere **D** simmetrico equivale alla *(1).* Se $r = k$ e A é una matrice d'incidenza di **D**, abbiamo $AJ = rJ = kJ = JA$. Allora, tenendo presente che A é non singolare e la (10.9), abbiamo

$$A^t = A^{-1}\left[(r-\lambda)I + \lambda J\right] \Rightarrow A^tA = A^{-1}(r-\lambda)A + \lambda A^{-1}JA \Rightarrow$$

$$A^tA = (r-\lambda)I + \lambda A^{-1}AJ \Rightarrow A^tA = (r-\lambda)I + \lambda J$$

e ció significa che due blocchi distinti hanno λ punti in comune. Cosí la *(1)* implica la *(2)* che, a sua volta, implica banalmente la *(3).*

Se vale la *(3),* il duale di **D** é un $2-$disegno con b punti e v blocchi e quindi, applicando la disuguaglianza di Fisher a **D** e $\mathbf{D}^*$, si ottiene $b = v$, cioé **D** é simmetrico e la nostra proposizione é completamente provata. □

11.2 Automorfismi

Sia $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ un disegno, σ un automorfismo di **D** e, assegnato un ordine lineare ai punti e ai blocchi del disegno,

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_v\}\ ,\ \mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots B_b\},$$

indichiamo con A la relativa matrice di incidenza. Consideriamo poi la permutazione α sugli indici degli elementi di $\mathcal{P}$ e la permutazione β sugli indici degli elementi di $\mathcal{B}$ cosí definite:

$$\alpha(i) = j \Leftrightarrow \sigma(p_i) = p_j\ ,\quad \text{per ogni } i, j = 1, ..., v,$$

$$\beta(i) = j \Leftrightarrow \sigma(B_i) = B_j\ ,\quad \text{per ogni } i, j = 1, ..., b.$$

La coppia (α, β) si dice *associata* a σ rispetto agli ordini fissati. Siano infine P e Q le matrici di permutazione associate rispettivamente ad α e a β^{-1}, cioé

$$P = (p_{ij})\ ,\quad \text{con } p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha(i) = j \\ 0 & \text{se} \quad \alpha(i) \neq j \end{cases}$$

e

$$Q = (q_{ij})\ ,\quad \text{con } q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \beta(j) = i \\ 0 & \text{se} \quad \beta(j) \neq i \end{cases}$$

Proposizione 11.2.1. *Una coppia di permutazioni (α, β), con $\alpha \in S_v$ e $\beta \in S_b$, é associata ad un automorfismo di* **D** *se, e solo se, é $A = PAQ$.*

Dimostrazione. Supponiamo che α e β siano associate ad un automorfismo σ di **D** e sia $C = PAQ = (c_{ij})$. Nel prodotto PA si effettua uno scambio di righe di A mediante α, mentre nel prodotto AQ si effettua uno scambio di colonne di A mediante β. Dunque si ha

$$c_{ij} = a_{\alpha(i)\beta(j)}.$$

Proviamo che é $A = PAQ$:

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow p_i \in B_j \Leftrightarrow \sigma(p_i) \in \sigma(B_j) \Leftrightarrow$$

$$p_{\alpha(i)} \in B_{\beta(j)} \Leftrightarrow a_{\alpha(i)\beta(j)} = 1$$

e, poiché C é una matrice ad elementi 0 e 1, si ha anche

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{\alpha(i)\beta(j)} = 0.$$

In definitiva é $A = PAQ$.

Viceversa, supponiamo che sia $A = PAQ$. Sia σ l'applicazione di $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ in sé cosí definita:

$$\begin{cases} \sigma(p_i) = p_{\alpha(i)} & \text{con} \quad p_i \in \mathcal{P} \\ \sigma(B_i) = B_{\beta(i)} & \text{con} \quad B_i \in \mathcal{B} \end{cases}.$$

Dunque σ é una permutazione di $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ che porta punti in punti e blocchi in blocchi. Inoltre si ha

$$p_i \in B_j \Leftrightarrow a_{ij} = 1 \Leftrightarrow a_{\alpha(i)\beta(j)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$p_{\alpha(i)} \in B_{\beta(j)} \Leftrightarrow \sigma(p_i) \in \sigma(B_j).$$

Questo prova che σ é un automorfismo di $\mathbf{D}$ e, poiché é evidente che la coppia (α, β) é associata a σ, l'asserto risulta completamente dimostrato. □

Proposizione 11.2.2. *Un automorfismo σ di un $2-$disegno simmetrico $\mathbf{D}$ non banale fissa lo stesso numero di punti e di blocchi.*

Dimostrazione. Fissiamo un ordine lineare per i punti e per i blocchi di $\mathbf{D}$ e sia A la relativa matrice di incidenza. Sia (α, β) la coppia di permutazioni associata a σ secondo gli ordinamenti fissati e siano P e Q le matrici di permutazione rispettivamente di α e di β^{-1}. Si vede facilmente che

$$\sigma(p_i) = p_i \Leftrightarrow \alpha(i) = i \Leftrightarrow p_{ii} = 1.$$

Quindi il numero di punti fissi di σ é uguale al numero di unitá presenti sulla diagonale di P. Poiché P é una matrice ad elementi 0 e 1, questo numero coincide con la sua traccia. Analogamente, il numero di blocchi fissi di σ coincide con la traccia di Q. Per la 11.2.1 si ha

$$A = PAQ$$

e, essendo A invertibile,

$$Q = A^{-1}P^{-1}A.$$

Dunque P^{-1} e Q, essendo matrici simili, hanno la stessa traccia. Inoltre, l'inversa di P, essendo P ortogonale, é in realtá la sua trasposta e quindi é

$$tr(Q) = tr(P^{-1}) = tr(P^t) = tr(P).$$

L'asserto resta cosí provato. □

Proposizione 11.2.3. *(Teorema delle orbite) Se G é un gruppo di automorfismi di un $2-$disegno simmetrico* $\mathbf{D}$ *non banale, allora il numero delle orbite di G sui punti e il numero delle orbite di G sui blocchi sono uguali.*

Dimostrazione. Indicato con v_1 il numero di orbite di G sui punti e con b_1 quello sui blocchi, per la (2.9) e per la 11.2.2 si ha

$$v_1|G| = \sum_{\sigma \in G} |F(\sigma)| = b_1|G|,$$

da cui segue $v_1 = b_1$. $\square$

Proposizione 11.2.4. *Un gruppo di automorfismi G di un $2-$disegno simmetrico* $\mathbf{D}$ *non banale che sia regolare sui punti é regolare anche sui blocchi.*

Dimostrazione. L'asserto discende immediatamente dalle 11.2.3 e (2.5), osservando che é $|G| = v = b$. $\square$

11.3 Il teorema di Bruck-Ryser-Chowla

Proposizione 11.3.1. *In un $2-(v,k,\lambda)$ disegno simmetrico non banale* $\mathbf{D}$ *risulta $k > \lambda$.*

Dimostrazione. Avendosi $r = k$, risulta ovviamente $k \geq \lambda$. D'altra parte, una matrice d'incidenza $A = (a_{ij})$ di $\mathbf{D}$ é non singolare (cfr.prop.10.3.4) e quindi, in forza della (10.10), non puó essere $r = k$, altrimenti avremmo $det(A) = 0$. $\square$

Definizione 11.3.2. Assegnato un $2-(v,k,\lambda)$ disegno simmetrico non banale, l'intero positivo $n = k - \lambda$ prende il nome di *ordine* del disegno. $\square$

La proposizione che segue, nel caso dei $2-$disegni simmetrici, fornisce condizioni necessarie di esistenza molto piú profonde di quelle finora trovate.

Proposizione 11.3.3. *(Teorema di Bruck-Ryser-Chowla) Supponiamo che esista un $2-(v,k,\lambda)$ disegno simmetrico non banale e sia $n = k-\lambda$ il suo ordine. Allora, se v é pari, n é un quadrato. Se v é dispari, l'equazione*

$$z^2 = nx^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda y^2 \tag{11.1}$$

ammette almeno una soluzione intera non banale.

Dimostrazione. Siano v pari e A una matrice d'incidenza del nostro disegno. Per la (10.10), avendosi $k = r$, risulta

$$det(A)^2 = det(AA^t) = k^2(k-\lambda)^{v-1}$$

e quindi $(k-\lambda)^{v-1}$ é un quadrato. Allora, essendo $v-1$ dispari, $n = k - \lambda$ deve essere un quadrato.

Supponiamo ora v dispari, sia $A = (a_{ij})$ una matrice di incidenza del $2-$disegno e ricordiamo che é $k > \lambda$ (cfr.prop.11.3.1) . Denotato con Q il campo razionale, consideriamo la trasformazione lineare invertibile di Q^v in sé definita da

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}A, \tag{11.2}$$

ove $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_v)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_1, ..., y_v)$. Tenendo presente la (10.9) e che é $r = k$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^{v} y_i^2 = \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^t = \boldsymbol{x}AA^t\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{x}[(k-\lambda)I + \lambda J]\boldsymbol{x}^t = (k-\lambda)\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^t + \lambda\boldsymbol{x}J\boldsymbol{x}^t. \tag{11.3}$$

D'altra parte, posto $\boldsymbol{j} = (1, 1, ..., 1)$, risulta

$$\boldsymbol{x}J\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{j}^t\boldsymbol{j})\boldsymbol{x}^t = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{j}^t)(\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}^t) = \left(\sum_{i=1}^{v} x_i\right)^2$$

e cosí posto

$$T = \sum_{i=1}^{v} x_i, \tag{11.4}$$

dalla (11.3) ricaviamo

$$\sum_{i=1}^{v} y_i^2 = (k-\lambda)\sum_{i=1}^{v} x_i^2 + \lambda T^2. \tag{11.5}$$

A questo punto, ricordando che ogni intero positivo puó scriversi come somma di quattro quadrati interi (*Lagrange,* 1770); sia

$$k - \lambda = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ ; \ \ a, b, c, d \in N. \tag{11.6}$$

Posto

$$H = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

osserviamo che risulta

$$HH^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I = (k-\lambda)I, \tag{11.8}$$

e

$$det(HH^t) = (det(H))^2 = (k-\lambda)^4, \tag{11.9}$$

cosí la matrice H é non degenere sui razionali.

Torniamo ora alla (11.5) e mettiamoci nell'ipotesi che sia

$$v \equiv 1 (mod\, 4). \tag{11.10}$$

Poiché $v - 1$ é multiplo di 4, possiamo suddividere le variabili

$$x_1, x_2, .., x_{v-1}$$

in gruppi di quattro

$$\underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4}\ ;\ \underbrace{x_5, x_6, x_7, x_8}\ ;\ \cdots\ ;\ \underbrace{x_{v-4}, x_{v-3}, x_{v-2}, x_{v-1}}$$

e, per ognuno di questi, introdurre le trasformazioni lineari invertibili di Q^4 in sé definite da

$$(z_{4s+1}, z_{4s+2}, z_{4s+3}, z_{4s+4}) = (x_{4s+1}, x_{4s+2}, x_{4s+3}, x_{4s+4})H, \tag{11.11}$$

con $s = 0, 1, ..., (v-5)/4$. Notiamo che, in forza della (11.8), abbiamo

$$\begin{aligned} &z^2_{4s+1} + z^2_{4s+2} + z^2_{4s+3} + z^2_{4s+4} = \\ &(z_{4s+1}, z_{4s+2}, z_{4s+3}, z_{4s+4})(z_{4s+1}, z_{4s+2}, z_{4s+3}, z_{4s+4})^t = \\ &(x_{4s+1}, x_{4s+2}, x_{4s+3}, x_{4s+4})HH^t(x_{4s+1}, x_{4s+2}, x_{4s+3}, x_{4s+4})^t = \\ &(k-\lambda)(x^2_{4s+1} + x^2_{4s+2} + x^2_{4s+3} + x_{4s+4}) \end{aligned} \tag{11.12}$$

e quindi

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{v-1} z_i^2 = \sum_{s=0}^{(v-5)/4} \sum_{j=1}^{4} z^2_{(4s+1)+j} = \\ \sum_{s=0}^{(v-5)/4} (k-\lambda) \sum_{j=1}^{4} x^2_{4s+j} = (k-\lambda) \sum_{i=1}^{v-1} x_i^2. \end{gathered} \tag{11.13}$$

Inoltre, dalle (11.5) e (11.13), abbiamo

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_v^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{v-1}^2 + (k-\lambda)x_v^2 + \lambda T^2. \tag{11.14}$$

Notiamo che, essendo le trasformazioni (11.2) e (11.11) invertibili, $x_1, x_2, ..., x_{v-1}$ possono esprimersi come combinazioni lineari a coefficienti razionali di $z_1, z_2, ..., z_{v-1}$ e quindi $y_1, y_2, ...y_v$ e T risultano combinazioni lineari a coefficienti razionali di $z_1, z_2, ..., z_{v-1}$ e x_v. In altre parole, la (11.14) puó interpretarsi come una identitá tra le forme lineari razionali $y_1, y_2, ..., y_v$ e T nelle variabili $z_1, z_2, ..., z_{v-1}$ e x_v.

A questo punto facciamo vedere che é possibile specializzare le variabili (indipendenti) $z_1, z_2, ..., z_{v-1}$, in modo che la (11.14) si riduca ad una uguaglianza del tipo

$$y_v^2 = (k-\lambda)x_v^2 + \lambda T^2, \tag{11.15}$$

con

$$y_v = \frac{p}{q}x_v\ ,\ \ T = \frac{m}{s}x_v, \tag{11.16}$$

ove p, q, m, s sono interi. A tale scopo, se é

$$y_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1v}x_v\ ,\ \ c_{ij} \in Q,$$

poniamo

$$z_1 = \begin{cases} (c_{12}z_2 + c_{13}z_3 + \cdots c_{1v}x_v)/(1-c_{11}) & \text{se} \quad c_{11} \neq 1 \\ \\ -(c_{12}z_2 + c_{13}z_3 + \cdots c_{1v}x_v)/2 & \text{se} \quad c_{11} = 1 \end{cases} \tag{11.17}$$

e osserviamo che con tale posizione risulta $y_1^2 = z_1^2$ e quindi la 11.14 diventa

$$y_2^2 + \cdots + y_v^2 = z_2^2 + \cdots + z_{v-1}^2 + (k-\lambda)x_v^2 + \lambda T^2. \tag{11.18}$$

La (11.18), in forza della (11.17), é una identitá tra forme lineari razionali nelle variabili $z_2, z_3, ..., z_{v-1}$ e x_v. A questo punto é chiaro che, iterando il procedimento precedente per le variabili $z_2, z_3, ..., z_{v-1}$, si giunge ad una relazione del tipo (11.15), ove y_v e T sono del tipo (11.16). Allora, sostituendo le (11.16) nella (11.15), abbiamo

$$\frac{p^2}{q^2} = (k-\lambda) + \frac{m^2}{s^2}\lambda.$$

o, equivalentemente,

$$(ps)^2 = (k-\lambda)(qs)^2 + \lambda(qm)^2.$$

Ne segue che, essendo $(v-1)/2$ pari, $x = ps$, $y = qs$ e $z = qm$ danno una soluzione intera non banale della (11.1).

Se $v \equiv 3(mod\, 4)$, detta x_{v+1} una nuova variabile, indipendente dalle x_i e y_i, e sommando $(k-\lambda)x_{v+1}^2$ ai due membri della (11.5), otteniamo

$$y_1^2 + \cdots + y_v^2 + (k-\lambda)x_{v+1}^2 = (k-\lambda)(x_1^2 + \cdots + x_v^2 + x_{v+1}^2) + \lambda T^2. \tag{11.19}$$

Allora, poiché $v+1$ é un multiplo di 4, possiamo suddividere le variabili

$$x_1, x_2, ..., x_v, x_{v+1}$$

in gruppi di quattro e introdurre le trasformazioni (11.11) per $s = 0, 1, ..., (v-3)/4$. Operando poi come nel caso precedente, giungiamo ad una identitá del tipo

$$(k-\lambda)x_{v+1}^2 = y_{v+1}^2 + \lambda T^2, \tag{11.20}$$

con

$$y_{v+1} = \frac{p}{q}x_{v+1}\ , \quad T = \frac{m}{s}x_{v+1}, \tag{11.21}$$

ove p, q, m, s sono interi. Sostituendo le (11.21) nella (11.20), abbiamo

$$\frac{p^2}{q^2} = (k-\lambda) - \frac{m^2}{s^2}\lambda$$

o, equivalentemente,

$$(ps)^2 = (k-\lambda)(qs)^2 - \lambda(qm)^2.$$

Ne segue che, essendo $(v-1)/2$ dispari, $x = ps$, $y = qs$ e $z = qm$ danno una soluzione intera non banale della (11.1) e l'asserto é completamente provato. $\square$

Corollario 11.3.4. *(Teorema di Bruck-Ryser) Se esiste un piano proiettivo d'ordine* n *e* $n \equiv 1, 2(mod\, 4)$, *allora* n *ammette una rappresentazione come somma di due quadrati interi.*

Dimostrazione. Nelle nostre ipotesi abbiamo che

$$v = n^2 + n + 1 \equiv 3(mod\, 4)$$

e quindi $v - 1$ é del tipo $4t + 2$, con t intero positivo. Allora $\frac{v-1}{2}$ é un intero dispari e il teorema di Bruck-Ryser-Chowla assicura che l'equazione

$$z^2 = nx^2 - y^2$$

ammette una soluzione intera non banale $(x, y, z) = (a, b, c)$. Ne segue che

$$na^2 = b^2 + c^2,$$

o equivalentemente

$$n = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

cioé, n é somma di due quadrati razionali. A questo punto l'asserto segue da un noto risultato di teoria dei numeri, il quale stabilisce che un intero é somma di due quadrati razionali se, e soltanto se, é somma di due quadrati interi. □

Esempio 11.3.5. Il teorema di Bruck-Ryser-Chowla permette di escludere la esistenza di 2−disegni simmetrici per molti valori dei paramentri. Per esempio, poiché 22 é pari e 5 non é un quadrato, non esiste un $2 - (22, 7, 2)$ disegno simmetrico.

Facciamo vedere che non esiste un $2 - (29, 8, 2)$ disegno simmetrico. Infatti, se per assurdo esistesse un tale disegno, l'equazione

$$x^2 = 6y^2 + 2z^2$$

ammetterebbe una soluzione intera non banale (m, n, s), con m, n, s primi fra loro. Poiché deve essere $m^2 = 6n^2 + 2s^2$, $m = 2t$ é un numero pari e abbiamo

$$4t^2 = 6n^2 + 2s^2 \Rightarrow 2t^2 = 3n^2 + s^2.$$

Da questa uguaglianza segue

$$2t^2 \equiv s^2(mod\ 3).$$

A questo punto, se fosse $t \not\equiv 0(mod\ 3)$, dovrebbe essere $t \equiv 1(mod\ 3)$ oppure $t \equiv 2(mod\ 3)$ e, in entrambi i casi, si avrebbe $2t^2 \equiv 2(mod\ 3)$ e quindi $s^2 \equiv 2(mod\ 3)$. Ma un quadrato di un intero non puó essere congruente a 2 modulo 3, perció necessariamente é $t \equiv 0(mod\ 3)$. Da questo segue che é anche $s \equiv 0(mod\ 3)$ e posto $t = 3d$ e $s = 3f$, si ha

$$18d^2 = 3n^2 + 9f^2 \Rightarrow 6d^2 - 3f^2 = n^2 \Rightarrow 3|n.$$

Allora 3 é un divisore di n, m e s, il che é assurdo, essendo questi primi tra loro. □

Esercizio 11.3.6. *Provare che non esiste un piano proiettivo finito d'ordine* 6. □

11.4 Restrizioni sui parametri

Dimostriamo un teorema che fornisce una limitazione per il numero di punti di un disegno simmetrico in funzione del suo ordine.

Proposizione 11.4.1. *Se* $\mathbf{D}$ *é un* $2-(v,k,\lambda)$ *disegno simmetrico non banale, allora risulta*

$$4n-1 \leq v \leq n^2+n+1.$$

Dimostrazione. dalla (10.5) per $r=k$ si ricava

$$v-1=\frac{k}{\lambda}(k-1)=\frac{n+\lambda}{\lambda}(n+\lambda-1)=\frac{\lambda^2+2\lambda n-\lambda+n(n-1)}{\lambda},$$

da cui segue

$$\lambda^2+(2n-v)\lambda+n(n-1)=0.$$

Dunque λ é soluzione della seguente equazione di secondo grado:

$$x^2+(2n-v)x+n(n-1)=0.$$

Un'altra soluzione della precedente equazione é il parametro $\overline{\lambda}$ del disegno complementare di $\mathbf{D}$. Infatti, $\overline{\mathbf{D}}$ é un $2-(v,v-k,v-2k+\lambda)$ disegno simmetrico e il suo ordine é

$$\overline{n}=(v-k)-(v-2k+\lambda)=k-\lambda=n.$$

Poiché $\mathbf{D}$ é non banale, λ e $\overline{\lambda}$ sono distinti, altrimenti avremmo $v=2k$ e dalla relazione $\lambda(v-1)=k(k-1)$ avremmo che k divide λ, contro la prop.11.3.1. Il discriminante della nostra equazione é, quindi, maggiore di zero, cioé é

$$(2n-v)^2-4n(n-1)>0 \Rightarrow (v-2n)^2>4n(n-1)=(2n-1)^2-1 \Rightarrow$$

$$(2n-1)^2 \leq (v-2n)^2.$$

Da questo, osservando che $2n-1$ e $v-2n$ sono interi non negativi, si ricava

$$2n-1 \leq v-2n \Rightarrow 4n-1 \leq v.$$

Ora, poiché λ e $\overline{\lambda}$ sono entrambi maggiori o uguali ad 1, possiamo scrivere

$$\frac{v-2n \pm \sqrt{(v-2n)^2-4n(n-1)}}{2} \geq 1 \Rightarrow$$

$$v-2n-2 \geq \mp\sqrt{(v-2n)^2-4n(n-1)} \Rightarrow 4-4v+8n \geq -4n^2+4n \Rightarrow$$

$$4v \leq 4n^2+4n+4 \Rightarrow v \leq n^2+n+1.$$

Questo prova completamente l'asserto. □

Concludiamo il paragrafo osservando che i valori estremali di v di cui alla proposizione precedente individuano rispettivamente due importanti classi di 2−disegni simmetrici: i *piani proiettivi,* che abbiamo giá introdotto e i 2−*disegni di Hadamard,* che studieremo nel seguito.

11.5 Polaritá

Sia **D** un $t-$disegno non banale con $t > 1$. Si chiama *correlazione* di **D** un isomorfismo tra **D** e il suo duale $\mathbf{D}^*$. Un disegno **D** che ammetta una correlazione é necessariamente un $2-$disegno simmetrico. Infatti, se c'é un isomorfismo tra **D** e $\mathbf{D}^*$, il numero di punti di **D** coincide con il numero di punti di $\mathbf{D}^*$. Inoltre, in questo caso, anche $\mathbf{D}^*$ é un 2-disegno simmetrico.

Tra le correlazioni rivestono particolare interesse le polaritá. Una *polaritá* π di un $2-$disegno simmetrico $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ é una correlazione che gode della seguente proprietá detta di *reciprocitá:*

$$x \in \pi(y) \Leftrightarrow y \in \pi(x)\ ,\ \text{con } x, y \in \mathcal{P}.$$

Un punto x di $\mathcal{P}$ si dice *assoluto* o *autoconiugato* in π se é $x \in \pi(x)$.

Esempio 11.5.1. Una correlazione (risp. polaritá) di ogni spazio proiettivo $PG(n, q)$ individua una correlazione (risp. polaritá) del $2-$disegno $PG_{n-1}(n, q)$. □

Esercizio 11.5.2. *Sia* $1 < d < n - 1$. *Provare che il* $2-$*disegno* $PG_d(n, q)$ *non ammette correlazioni.* □

Il teorema che segue caratterizza i disegni che ammettono polaritá.

Proposizione 11.5.3. *Un* $2-$*disegno simmetrico* **D** *ammette una polaritá se, e solo se, esiste una matrice di incidenza di* **D** *che sia simmetrica.*

Dimostrazione. Supponiamo che **D** ammetta una polaritá π. Assegniamo un ordine lineare ai punti di **D** :

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}$$

e ordiniamo i suoi blocchi nel seguente modo

$$\mathcal{B} = \{\pi(p_1), \pi(p_2), \dots, \pi(p_v)\}.$$

La matrice di incidenza A di **D** relativa agli ordinamenti fissati si dice associata a π. Proviamo che A é simmetrica:

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow p_i \in B_j = \pi(p_j)$$

e per la proprietá di reciprocitá si ha

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow p_i \in \pi(p_j) \Leftrightarrow p_j \in \pi(p_i) = B_i \Leftrightarrow a_{ji} = 1.$$

Ne segue che A é simmetrica.

Viceversa, supponiamo che **D** ammetta una matrice di incidenza simmetrica A relativa ai seguenti ordinamenti:

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}\ ,\ \mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots B_b\}.$$

Sia π l'applicazione da $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}^*$ cosí definita:

$$\begin{cases} \pi(p_i) = B_i, & \text{per ogni} \quad p_i \in \mathcal{P} \\ \\ \pi(B_i) = p_i^*, & \text{per ogni} \quad B_i \in \mathcal{B} \end{cases}.$$

E' evidente che π é una biiezione che porta punti di $\mathbf{D}$ in punti di $\mathbf{D}^*$ e blocchi di $\mathbf{D}$ in blocchi di $\mathbf{D}^*$. Bisogna pertanto provare che conserva l'incidenza. Abbiamo:

$$p_i \in B_j \Leftrightarrow a_{ij} = 1 \Leftrightarrow a_{ji} = 1 \Leftrightarrow p_j \in B_i \Leftrightarrow$$

$$B_i \in p_j^* \Leftrightarrow \pi(p_i) \in \pi(B_j)$$

e cosí π é una correlazione di $\mathbf{D}$. Proviamo che é verificata anche la proprietá di reciprocitá:

$$p_i \in \pi(p_j) \Leftrightarrow p_i \in B_j \Leftrightarrow a_{ij} = 1 \Leftrightarrow p_j \in B_i = \pi(p_i).$$

Ne segue che π é una polaritá e l'asserto é provato. $\square$

Cerchiamo ora di capire se vi sono relazioni tra il numero di punti assoluti di una polaritá π di un disegno $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ e i parametri del disegno stesso. Se A é una matrice di incidenza di $\mathbf{D}$ associata a π si ha

$$p_i \in \pi(p_i) \Leftrightarrow a_{ii} = 1.$$

Allora, se $\nu(\pi)$ é il numero di punti assoluti di π possiamo scrivere $\nu(\pi) = tr(A)$. Poiché A é una matrice simmetrica la sua traccia coincide con la somma dei suoi autovalori e quindi é

$$\nu(\pi) = \text{ somma degli autovalori di A.}$$

Occorrono, a questo punto, informazioni sugli autovalori di A. Per cominciare, cerchiamo gli autovalori di AA^t.

Proposizione 11.5.4. *Se A é la matrice di incidenza di un $2-$disegno simmetrico $\mathbf{D}$, allora gli unici autovalori di AA^t sono k^2 e $k - \lambda$, rispettivamente con molteplicitá 1 e $v - 1$.*

Dimostrazione. Si verifica facilmente che i seguenti $v - 1$ vettori linearmente indipendenti di Q^v

$$(-1, 1, 0, ..., 0), (0, -1, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., -1, 1)$$

sono autovettori di AA^t di autovalore $k - \lambda$. Invece, il vettore $(1, 1, ..., 1)$ é autovettore di AA^t di autovalore k^2. Infatti, tenendo presente che é $r = k$, si ha

$$(1, 1, \ldots, 1)AA^t = (1, 1, \ldots, 1) \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{bmatrix} =$$

$$(k + \lambda(v - 1), k + \lambda(v - 1), \ldots, k + \lambda(v - 1)) =$$

$$(k + k(k - 1), k + k(k - 1), \ldots, k + k(k - 1)) = k^2(1, 1, \ldots, 1).$$

Allora, poiché AA^t é una matrice di ordine v, le molteplicitá di $k - \lambda$ e k^2 sono rispettivamente $v - 1$ e 1 e l'asserto é provato. $\square$

A questo punto siamo in grado di calcolare $\nu(\pi)$.

Proposizione 11.5.5. *Se π é una polaritá di un $2-(v,k,\lambda)$ disegno simmetrico non banale, allora si ha*

$$\nu(\pi) = k + m\sqrt{k-\lambda} - (v-1-m)\sqrt{k-\lambda} = k + (2m-v+1)\sqrt{k-\lambda}$$

con m intero non negativo e

$$v - 1 - \frac{k}{\sqrt{k-\lambda}} \leq 2m \leq 2(v-1).$$

Dimostrazione. Sia A una matrice di incidenza del disegno associata a π. Poiché A é una matrice simmetrica, si ha $AA^t = A^2$. Gli autovalori di A^2, per la proposizione precedente, sono k^2 e $k-\lambda$ e quindi i possibili autovalori di A sono k, $-k$, $\sqrt{k-\lambda}$ e $-\sqrt{k-\lambda}$.

Si verifica facilmente che $(1,1,..,1)$ é autovettore di A di autovalore k, il che esclude $-k$ come possibile autovalore di A, visto che la molteplicitá di k^2 come autovalore di A^2 é 1. Per lo stesso motivo k ha molteplicitá 1 come autovalore di A. Inoltre, poiché una matrice simmetrica ha tutti gli autovalori nel campo, se $m \geq 0$ é la molteplicitá di $\sqrt{k-\lambda}$ come autovalore di A, allora $(v-1)-m$ é la molteplicitá di $-\sqrt{k-\lambda}$. Da questo segue

$$\nu(\pi) = k + m\sqrt{k-\lambda} - (v-1-m)\sqrt{k-\lambda} \geq 0$$

e quindi é

$$k + 2m\sqrt{k-\lambda} \geq (v-1)\sqrt{k-\lambda} \Rightarrow 2m \geq v - 1 - \frac{k}{\sqrt{k-\lambda}}.$$

Infine, poiché m é la molteplicitá di $\sqrt{k-\lambda}$, si ha anche

$$m \leq v-1 \Rightarrow 2m \leq 2(v-1)$$

□

A questo punto siamo in grado di dare una condizione necessaria di esistenza per 2−disegni simmetrici che ammettono polaritá.

Proposizione 11.5.6. *Sia* **D** *un $2-(v,k,\lambda)$ disegno simmetrico non banale e sia π una polaritá di* **D**. *Se $k-\lambda$ non é un quadrato intero, allora v é dispari ed é $\nu(\pi) = k$. Se é $\nu(\pi) = 0$, allora $k-\lambda$ é un quadrato e $\sqrt{k-\lambda}$ divide λ.*

Dimostrazione. Se $k-\lambda$ non é un quadrato intero, dalla proposizione precedente segue

$$(2m-v+1)\sqrt{k-\lambda} = 0\ , \quad \nu(\pi) = k$$

e, poiché in un disegno non banale é $k > \lambda$, deve essere $2m+1 = v$.

Se é $\nu(\pi) = 0$, ancora dalla proposizione precedente segue che

$$(2m-v+1)\sqrt{k-\lambda}$$

é un intero non nullo. Allora, necessariamente $k-\lambda$ é il quadrato di un intero. Inoltre, abbiamo anche che

$$\sqrt{k-\lambda} \mid k \Rightarrow \sqrt{k-\lambda} \mid (k-\lambda) + \lambda,$$

da cui segue che $\sqrt{k-\lambda}$ divide λ. □