

# PARTE TERZA

## ELEMENTI DI TEORIA DEI DISEGNI

Una delle difficoltà comune a quasi tutti i campi della combinatoria é che, variando anche di poco i parametri numerici di uno stesso problema, spesso bisogna cambiare completamente tecnica per trovare una soluzione. Ciò rende particolarmente stimolante la ricerca di metodi per superare questa sorta di *sporadicità* in modo da sintetizzare in teorie generali i risultati già noti e quelli nuovi che si spera di ottenere. Uno di tali metodi si basa sullo studio di famiglie di insiemi finiti con qualche proprietà di *regolarità* come, ad esempio, le rette di un piano affine o proiettivo. E' appunto in quest'ambito che si inquadra la *teoria dei disegni*, della quale esporremo i primi elementi, cercando di evidenziare le sue interazioni con altri tipi di strutture quali i gruppi, le geometrie su campi di Galois, i codici.



# Capitolo 10

## Generalit  sui disegni

### 10.1 Prime definizioni ed esempi

Siano  $\mathcal{P}$  un insieme finito con  $v$  elementi e  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$  una famiglia propria, cio   $B_i \neq B_j$  per  $i \neq j$ , di  $b$  sottoinsiemi non vuoti di  $\mathcal{P}$  di cardinalit   $k$ . Gli elementi di  $\mathcal{P}$  e di  $\mathcal{B}$  si dicono rispettivamente *punti* e *blocchi*. Un punto e un blocco che si appartengano e due blocchi ad intersezione non vuota si dicono *incidenti*.

**DEFINIZIONE 10.1.1.** La coppia  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  prende il nome di *t-disegno con parametri*  $(v, k, \lambda)$ , o di *t - (v, k,  ) disegno*, se ogni sottoinsieme di  $\mathcal{P}$  con  $t$  punti   contenuto in esattamente  $\lambda$  blocchi,  $\lambda$  e  $t$  essendo interi positivi tali che

$$v \geq k \geq t \geq 1.$$

Talvolta un *t*-disegno   anche chiamato semplicemente *disegno*. Diversi autori usano il simbolo  $S_\lambda(t, v; k)$  per denotare un *t - (v, k,  ) disegno*.

Un *t - (v, k,  ) disegno* si dice *banale* o *completo* se ogni sottoinsieme di  $\mathcal{P}$  d'ordine  $k$    un blocco. Un *t*-disegno per cui  $v = b$  si dice *simmetrico*.  $\square$

Nel seguito, tranne esplicito avviso, ci riferiremo esclusivamente a disegni non banali e quindi supporremo costantemente

$$v > k > t \quad \text{e} \quad \binom{v}{k} > b.$$

**OSSERVAZIONE 10.1.2.** La nozione di *t*-disegno si estende a quella di *t-disegno con blocchi ripetuti* rimuovendo la condizione che la famiglia  $\mathcal{B}$  dei blocchi sia propria. In questo contesto, evidentemente molto pi  generale, i disegni per cui  $\mathcal{B}$    propria sono detti *semplici*. Comunque, tale generalizzazione, essendo inessenziale per i nostri scopi, non sar  quasi mai presa in considerazione.  $\square$

**DEFINIZIONE 10.1.3.** Un *isomorfismo* tra due *t*-disegni   una biiezione tra i punti del primo e quelli del secondo che trasformi, insieme alla propria inversa, blocchi in blocchi. Un *automorfismo* di un *t*-disegno  $\mathbf{D}$    un isomorfismo del *t*-disegno in se stesso.  $\square$

Ovviamente, disegni isomorfi hanno gli stessi parametri. La relazione di isomorfismo fra  $t$ -disegni é di equivalenza e quindi essi vengono studiati a meno di isomorfismi. Per due disegni isomorfi  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}'$  usiamo la notazione  $\mathbf{D} \sim \mathbf{D}'$ .

Gli automorfismi di un disegno  $\mathbf{D}$  formano un gruppo, il *gruppo degli automorfismi* di  $\mathbf{D}$  che denotiamo con  $Aut(\mathbf{D})$ . Chiaramente  $Aut(\mathbf{D})$  é un gruppo di permutazioni sull'insieme dei punti di  $\mathbf{D}$  che opera anche sull'insieme dei blocchi ed é facile rendersi conto che disegni isomorfi hanno i rispettivi gruppi degli automorfismi a loro volta isomorfi. I sottogruppi di  $Aut(\mathbf{D})$  si chiamano *gruppi di automorfismi* di  $\mathbf{D}$ .

Iniziamo col riportare alcuni esempi classici di disegni.

**ESEMPIO 10.1.4.** Sia  $PG(n, q)$  lo spazio proiettivo  $n$ -dimensionale su un campo di Galois di ordine  $q$  con  $n > 1$ , allora i punti e i sottospazi  $d$ -dimensionali di  $PG(n, q)$ , con  $1 \leq d < n$ , costituiscono un 2-disegno. Denotiamo questo disegno con  $PG_d(n, q)$ , se é  $d > 1$ , e con  $PG(n, q)$ , se é  $d = 1$ . I parametri  $v, k, \lambda$  di  $PG_d(n, q)$  sono i seguenti (cfr.(6.16),( 6.18)):

$$\begin{aligned} v &= q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1 = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \\ k &= q^d + q^{d-1} + \dots + q + 1 = \frac{q^{d+1} - 1}{q - 1} \\ \lambda &= \begin{cases} \frac{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\dots(q^{n-d+1}-1)}{(q^{d-1}-1)(q^{d-2}-1)\dots(q-1)} & \text{se } d > 1 \\ 1 & \text{se } d = 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Si osservi che, per ogni  $d$ , il gruppo degli automorfismi di  $PG_d(n, q)$  non é altro che il gruppo  $PGL(n+1, q)$  delle collineazioni dello spazio proiettivo  $PG(n, q)$  (cfr.6.2.22). Inoltre,  $PG_d(n, q)$  é un disegno simmetrico se, e solo se, risulta  $d = n - 1$ .  $\square$

**ESEMPIO 10.1.5.** Sia  $AG(n, q)$  lo spazio affine  $n$ -dimensionale su un campo di Galois di ordine  $q$  con  $n > 1$ , allora i punti e i sottospazi  $d$ -dimensionali di  $AG(n, q)$ , con  $1 \leq d < n$ , costituiscono un 2-disegno. Denotiamo questo disegno con  $AG_d(n, q)$ , se é  $d > 1$ , e con  $AG(n, q)$ , se é  $d = 1$ . I parametri  $v, k, \lambda$  di  $AG_d(n, q)$  sono i seguenti (cfr.(6.19)):

$$\begin{aligned} v &= q^n, \quad k = q^d, \\ \lambda &= \begin{cases} \frac{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\dots(q^{n-d+1}-1)}{(q^{d-1}-1)(q^{d-2}-1)\dots(q-1)} & \text{se } d > 1 \\ 1 & \text{se } d = 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Si osservi che, per ogni  $d$ , il gruppo degli automorfismi di  $AG_d(n, q)$  non é altro che il gruppo  $AGL(n, q)$  delle collineazioni dello spazio affine  $AG(n, q)$  (cfr.6.4.15).  $\square$

**ESEMPIO 10.1.6.** Il 2-disegno  $AG_2(n, 2)$  é anche un 3- $(2^n, 4, 1)$  disegno. Una retta di  $AG(n, 2)$ , infatti, contiene solo due punti e conseguentemente tre punti di  $AG(n, 2)$ , non essendo allineati, sono sempre contenuti in un unico piano dello spazio.  $\square$

**OSSERVAZIONE 10.1.7.** Una parte molto interessante della teoria dei disegni, di cui non ci occuperemo in queste note, riguarda la classificazione (ancora aperta) dei disegni con gli stessi parametri di  $PG_d(n, q)$  o  $AG_d(n, q)$ . Esistono infatti molti disegni di questo tipo non isomorfi a  $PG_d(n, q)$  o  $AG_d(n, q)$ . Per esempio, si conoscono 80 disegni non isomorfi con gli stessi parametri di  $PG(3, 2)$ , 5 con quelli di  $PG_2(3, 2)$ , 4 con quelli di  $AG_2(3, 2)$ .  $\square$

**ESEMPIO 10.1.8.** Sia  $\mathcal{P}$  un insieme d'ordine 8 e, fissato un suo elemento  $P$ , si costruisca un piano di Fano  $\pi_2$  sui rimanenti 7 elementi. Sia, inoltre,  $\mathcal{B}$  la famiglia di sottoinsiemi di  $\mathcal{P}$  costituita dai complementari delle rette di  $\pi_2$  e dai sottoinsiemi ottenuti aggiungendo  $P$  ad ogni retta di  $\pi_2$ . La coppia  $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$  è un  $3 - (8, 4, 1)$  disegno che si chiama *estensione del piano di Fano*.  $\square$

**ESEMPIO 10.1.9.** Siano  $\mathcal{P}$  l'insieme dei punti di una  $(q^2 + 1)$ -calotta di  $PG(3, q)$  e  $\mathcal{B}$  l'insieme dei  $(q + 1)$ -archi piani contenuti in  $\mathcal{P}$ . Allora  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  è un  $3 - (q^2 + 1, q + 1, 1)$  disegno. È facile rendersi conto che  $\mathbf{D}$  è anche un  $2 - (q^2 + 1, q + 1, q + 1)$  disegno e un  $1 - (q^2 + 1, q + 1, q^2 + q)$  disegno.

I disegni con parametri del tipo  $t = 3, v = n^2 + 1, k = n + 1, \lambda = 1$  prendono il nome di *piani inversivi* di ordine  $n$ . Chiaramente il  $3$ -disegno che abbiamo costruito a partire da una  $(q^2 + 1)$ -calotta di  $PG(3, q)$  è un piano inversivo d'ordine  $q$ ; un piano inversivo ad esso isomorfo si dice *immersibile*.

Osserviamo che al momento non si conoscono esempi di piani inversivi non immersibili e una congettura abbastanza accreditata vuole che tali piani non esistano. Un importante risultato al riguardo, dovuto a *P. Dembowski*, ([35], cap.VI) stabilisce che *ogni piano inversivo d'ordine pari è immersibile*.  $\square$

**ESEMPIO 10.1.10.** Siano  $\Omega$  un'iperovale di un piano proiettivo  $\pi$  d'ordine pari  $n$  e  $\pi^*$  il piano duale di  $\pi$ . Denotiamo con  $\mathcal{P}$  l'insieme dei punti di  $\pi^*$  corrispondenti alle  $\frac{n(n-1)}{2}$  rette di  $\pi$  esterne ad  $\Omega$  e con  $\mathcal{B}$  l'insieme delle rette di  $\pi^*$  corrispondenti agli  $n^2 - 1$  punti di  $\pi$  non appartenenti ad  $\Omega$ . Allora  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  è un  $2 - (\frac{n(n-1)}{2}, \frac{n}{2}, 1)$  disegno che si chiama *disegno delle rette esterne ad  $\Omega$* .  $\square$

**ESEMPIO 10.1.11.** Siano  $\mathcal{P}$  l'insieme dei punti di un arco hermitiano  $H$  di un piano proiettivo finito  $\pi_n$  d'ordine  $n$  e  $\mathcal{B}$  l'insieme delle intersezioni di  $H$  con le rette secanti. Allora  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  è un  $2 - (n\sqrt{n} + 1, \sqrt{n} + 1, 1)$  disegno.

Un disegno  $\mathcal{U}$  con parametri del tipo  $t = 2, v = n\sqrt{n} + 1, k = \sqrt{n} + 1, \lambda = 1$  prende il nome di *unital* d'ordine  $\sqrt{n}$ . Chiaramente il disegno che abbiamo costruito a partire da un arco hermitiano è un unital.

Un unital  $\mathcal{U} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  si dice *immersibile* se esiste una applicazione iniettiva  $f$  fra i suoi punti e quelli di un piano proiettivo finito  $\pi$  che trasformi i blocchi di  $\mathcal{U}$  nell'intersezione delle rette di  $\pi$  secanti  $f(\mathcal{P})$ . Ogni arco hermitiano di  $\pi_n$  è dunque un unital immersibile, ma un unital immersibile in un piano  $\pi_n$  non è necessariamente isomorfo ad un suo arco hermitiano; per esempio, il  $2 - (28, 4, 1)$  disegno delle rette esterne ad un'iperovale di  $PG(2, 8)$  è un unital d'ordine 3 immersibile in  $PG(2, 8)$  e non è un arco hermitiano di questo piano.

La ricerca e la classificazione degli unital di un fissato ordine  $m$  è un problema molto interessante

ma altrettanto difficile. Per avere una idea della sua complessità basti pensare che solo nel caso  $m = 4$  sono noti più di 138 unital tra loro non isomorfi.  $\square$

**ESEMPIO 10.1.12.** Sia  $G$  un gruppo  $t$ -transitivo su un insieme  $\mathcal{P}$  con  $v$  elementi. Fissato un sottoinsieme  $B$  di  $\mathcal{P}$  di ordine  $k$ , con  $v > k > t$ , sia  $G(B)$  l'orbita di  $B$  rispetto all'azione di  $G$  sulla famiglia dei  $k$ -sottoinsiemi di  $\mathcal{P}$ , cioè

$$G(B) = \{\sigma(B) : \sigma \in G\}.$$

Se  $T$  e  $T'$  sono due sottoinsiemi di  $\mathcal{P}$  di ordine  $t$ , poiché  $G$  è  $t$ -transitivo su  $\mathcal{P}$ , esiste  $\tau \in G$  tale che risulta  $\tau(T) = T'$ . Allora, un elemento  $B_1 = \sigma(B) \in G(B)$  contiene  $T$  se, e solo se,  $B_2 = \tau(\sigma(B)) \in G(B)$  contiene  $T'$ . Quindi il numero di elementi di  $G(B)$  che contengono  $T$  coincide con il numero di elementi di  $G(B)$  che contengono  $T'$ . Da questo segue che  $(\mathcal{P}, G(B))$  è un  $t$ -disegno, il quale si dice *associato* a  $G$  e a  $B$  e viene indicato con il simbolo  $\mathbf{D}(\mathcal{P}, G, B)$ . Il blocco  $B$  è detto *blocco base* e il disegno ottenuto non dipende da  $B$  ma solo dall'orbita a cui esso appartiene. Inoltre  $G$ , per costruzione, è un gruppo di automorfismi del disegno  $t$ -transitivo sui punti e transitivo sui blocchi. Si osservi che il numero dei blocchi  $b$  ha la seguente espressione (cfr.(2.4))

$$b = |G(B)| = |G : G_B|.$$

Ovviamente,  $\mathbf{D}(\mathcal{P}, G, B)$  è un disegno banale se, e solo se,  $G$  è transitivo sull'insieme dei  $k$ -sottoinsiemi di  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**ESERCIZIO 10.1.13.** Dare esempi di disegni non isomorfi aventi gruppi di isomorfismi isomorfi.  $\square$

**ESERCIZIO 10.1.14.** Verificare che i punti e le rette di un piano proiettivo finito d'ordine  $n$  definiscono un 2-disegno simmetrico con parametri

$$v = b = n^2 + n + 1, \quad k = n + 1, \quad \lambda = 1.$$

Provare poi che ogni 2-disegno avente gli stessi parametri di un piano proiettivo finito d'ordine  $n$  è un piano proiettivo.  $\square$

**ESERCIZIO 10.1.15.** Verificare che i punti e le rette di un piano affine finito d'ordine  $n$  definiscono un 2-disegno con parametri

$$v = n^2, \quad b = n^2 + n, \quad k = n, \quad \lambda = 1.$$

Provare poi che ogni 2-disegno avente gli stessi parametri di un piano affine finito d'ordine  $n$  è un piano affine.  $\square$

Il problema di costruire  $t$ -disegni con parametri assegnati, e più in generale di descriverli tutti a meno di isomorfismi, è uno dei più interessanti e difficili di tutta la teoria. Basti pensare che fino al 1983 è stata in dubbio l'esistenza di  $t$ -disegni non banali con  $t > 5$ . Il primo esempio di 6-disegno non banale, scoperto appunto nel 1983, si deve a *S.S. Magliveras* e *D.W. Leavitt* [59]. Solo nel 1987 *L. Teirlink* provò sorprendentemente che, per ogni intero positivo  $t$ , esiste un

$t$ -disegno non banale [86],[87]. Osserviamo che nel caso dei  $t$ -disegni con blocchi ripetuti non é difficile provare che, comunque assegnati gli interi positivi  $k$  e  $t$ , con  $t < k < v - t$ , esiste un  $t - (v, k, \lambda)$  disegno con blocchi ripetuti, per un opportuno valore di  $\lambda$  (si veda ad esempio (1.2) di [29]).

Dal punto di vista storico, la teoria dei disegni si puó far risalire ai lavori [54](1847), [55](1850) di T.P.Kirkman e [81](1853) di J.Steiner, nei quali vengono descritti e studiati alcuni problemi relativi ai  $2 - (v, 3, 1)$  disegni. Di questi il piú famoso é il *Kirkman School Girl Problem*:

*Trovare un modo per far passeggiare ogni giorno di una settimana 15 studentesse disposte in fila per 3 in modo che alla fine della settimana ogni due studentesse siano capitate una, ed una sola volta, nella stessa fila.*

Il problema, col nostro linguaggio, consiste nel trovare un  $2 - (15, 3, 1)$  disegno (i cui punti sono le studentesse) con la seguente proprietá: ( $k$ ) *la famiglia dei blocchi si puó ripartire in 7 sottoinsiemi* (corrispondenti ai giorni della settimana) *composti ciascuno da cinque blocchi* (le file di un giorno) *in modo tale che i blocchi di ciascun sottoinsieme siano una partizione dei punti*. Kirkman riuscí a provare solo l'esistenza di un tale disegno; in effetti provó molto di piú e cioé che *la condizione  $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$  é necessaria e sufficiente per l'esistenza di un 3-disegno con  $\lambda = 1$  su  $v > 1$  punti*. Si é dovuto attendere piú di un secolo per avere la soluzione completa del problema, che si deve a *D.K.Ray-Chaudhuri* e *R.M.Wilson* [70](1971). Tali autori, infatti, in un contesto molto piú generale, hanno provato il  $2 - (15, 3, 1)$  disegno  $PG(3, 2)$  ha la proprietá ( $k$ ).

In onore di Steiner, i  $2 - (v, 3, 1)$  disegni vengono anche chiamati *sistemi di terne di Steiner* e, piú in generale, si chiamano *sistemi di Steiner* i disegni con  $\lambda = 1$ .

## 10.2 Prime relazioni tra i parametri di un disegno

Iniziamo col provare alcune relazioni elementari tra i parametri di un disegno, che costituiscono anche delle condizioni necessarie di esistenza.

**PROPOSIZIONE 10.2.1.** *Sia  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  un  $t - (v, k, \lambda)$  disegno. Se  $i$  é un intero tale che  $1 \leq i \leq t$ , allora  $\mathbf{D}$  é anche un  $i - (v, k, \lambda_i)$  disegno con*

$$\lambda_i = \frac{\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}} \lambda = \frac{(v-t+1)(v-t+2) \cdots (v-i)}{(k-t+1)(k-t+2) \cdots (k-i)} \lambda. \quad (10.1)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $X \subseteq \mathcal{P}$  con  $|X| = i$  e sia  $\lambda(X)$  il numero di blocchi contenenti  $X$ . Contiamo il numero  $\nu$  delle coppie ordinate  $(B, C)$ , dove é  $C \subseteq \mathcal{P} \setminus X$ ,  $|C| = t - i$  e  $B$  é un blocco contenente  $X \cup C$ . Sia  $B'$  un blocco di  $\mathcal{B}$  contenente  $X$ . Il numero di coppie del tipo  $(B, C)$ , con  $B'$  come primo elemento, é dato dal numero dei sottoinsiemi di  $B' \setminus X$  costituiti da  $t - i$  punti e quindi é pari a  $\binom{k-i}{t-i}$ . Da ciò discende che é

$$\nu = \lambda(X) \binom{k-i}{t-i}.$$

Sia ora  $C'$  un sottoinsieme di  $\mathcal{P} \setminus X$  costituito da  $t - i$  punti. Il numero delle coppie del tipo  $(B, C)$ , con  $C'$  come secondo elemento, é dato dal numero di blocchi contenenti  $X \cup C'$  ma, poiché  $X \cup C'$  ha ordine  $t$ , questo numero é pari a  $\lambda$ . Il sottoinsieme  $C'$  puó essere poi scelto in  $\binom{v-i}{t-i}$  modi. Possiamo quindi scrivere

$$\nu = \lambda \binom{v-i}{t-i}.$$

Uguagliando le due relazioni trovate si ottiene

$$\lambda(X) = \lambda_i = \frac{\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}} \lambda,$$

ove l'intero  $\lambda(X)$  dipende solo dall'ordine  $i$  di  $X$ . □

**PROPOSIZIONE 10.2.2.** *Assegnato un  $t - (v, k, \lambda)$  disegno e posto  $r = \lambda_1$ , se  $i$  é un intero tale che  $1 \leq i < t$ , risulta:*

$$\binom{k-i}{t-i} \text{ é un divisore di } \binom{v-i}{t-i} \lambda \quad (10.2)$$

$$(v-i)\lambda_{i+1} = (k-i)\lambda_i, \text{ per ogni } i < t \quad (10.3)$$

$$vr = bk. \quad (10.4)$$

Nel caso  $t = 2$  si ha anche

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \quad (10.5)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La (10.2) é conseguenza immediata della prop.10.2.1. Inoltre, sempre per la prop.10.2.1, si ha

$$\lambda_i = \frac{(v-t+1)(v-t)\cdots(v-i)}{(k-t+1)(k-t)\cdots(k-i)} \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda_i = \frac{v-i}{k-i} \lambda_{i+1} \Rightarrow (k-i)\lambda_i = (v-i)\lambda_{i+1}.$$

In particolare per  $i = 0$  si ottiene  $\lambda_0 k = v \lambda_1$  e cioè  $bk = vr$ . Se infine é  $t = 2$ , per  $i = 1$  la (10.3) diventa  $r(k-1) = \lambda(v-1)$ . □

Osserviamo esplicitamente che le relazioni di cui alle precedenti proposizioni sono necessarie per l'esistenza di  $t$ -disegni con parametri  $v, k, \lambda$  assegnati; per esempio, si ha subito che non puó esistere un  $3 - (11, 4, 1)$  disegno. Tali condizioni però, pur escludendo molte possibilità, sono ben lungi dall'essere sufficienti. Per esempio, é noto che non esiste un  $2 - (22, 7, 2)$  disegno anche se questi parametri verificano tutte le relazioni precedenti.

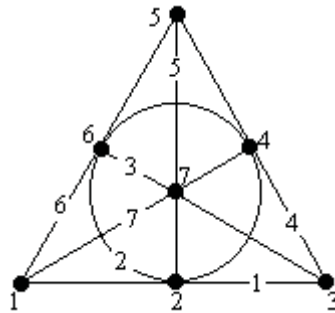
### 10.3 Matrici d'incidenza

Se si ordinano linearmente gli insiemi dei punti e dei blocchi di un  $t - (v, k, \lambda)$  disegno  $\mathbf{D}$ ,  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}$  e  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ , si può considerare la matrice sul campo razionale  $A = (a_{ij})$  di tipo  $v \times b$  definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } p_i \in B_j \\ 0, & \text{se } p_i \notin B_j \end{cases}. \quad (10.6)$$

Una tale matrice, che ovviamente dipende dagli ordinamenti scelti su  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{B}$ , prende il nome di *matrice d'incidenza* di  $\mathbf{D}$ . E' evidente che ogni disegno é completamente individuato da una sua matrice d'incidenza ed é facile rendersi conto che, se  $A$  é una matrice d'incidenza di  $\mathbf{D}$ , allora una matrice  $C$  é di incidenza per  $\mathbf{D}$  (o, piú in generale, per un disegno isomorfo a  $\mathbf{D}$ ) se, e soltanto se, si ottiene da  $A$  mediante opportune permutazioni delle righe e delle colonne. Talvolta conviene considerare  $A$  come matrice su un campo diverso da quello dei razionali. Quando ciò si renderá necessario, verrà posto opportunamente in evidenza.

**ESEMPIO 10.3.1.** Consideriamo il piano di Fano  $PG(2, 2)$ , cioè il 2-disegno simmetrico dei punti e delle rette del piano proiettivo sul campo di Galois d'ordine 2. Tale disegno ha parametri  $(7, 3, 1)$  e sappiamo che, a meno di isomorfismi, é l'unico 2 -  $(7, 3, 1)$  disegno. Se numeriamo i punti e le rette come in figura,



la relativa matrice d'incidenza é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Nel seguito denoteremo con  $I$  e  $J$  una matrice identità e una matrice con tutti gli elementi uguali ad 1, rispettivamente. L'ordine di tali matrici risulterà quasi sempre chiaro dal contesto; nel caso contrario scriveremo  $I_m$  e  $J_m$  per indicare il loro ordine  $m$ .

**PROPOSIZIONE 10.3.2.** *Se  $A$  è una matrice d'incidenza di un  $2-(v, k, \lambda)$  disegno, allora risulta:*

$$AJ = rJ, \quad (10.7)$$

$$JA = kJ, \quad (10.8)$$

$$AA^t = \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{bmatrix} = (r - \lambda)I + \lambda J, \quad (10.9)$$

$$\det(AA^t) = rk(r - \lambda)^{v-1}. \quad (10.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La (10.7) e la (10.8) seguono rispettivamente dal fatto che il numero dei blocchi incidenti un punto è pari a  $\lambda_1 = r$  e il numero dei punti incidenti un blocco è pari a  $k$ .

Assegnate due righe distinte di  $A$ , esistono esattamente  $\lambda$  colonne che presentano 1 nelle posizioni corrispondenti a tali righe e da ciò segue la (10.9).

Ora, sottraiamo la prima colonna di  $AA^t$  a tutte le rimanenti e in questa nuova matrice aggiungiamo alla prima riga tutte le altre. La matrice  $C$  così ottenuta ha lo stesso determinante di  $AA^t$  e ha la seguente espressione:

$$C = \begin{bmatrix} r + (v - 1)\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & r - \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & 0 & \cdots & r - \lambda \end{bmatrix}.$$

Allora, tenuto conto della (10.5), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \det(AA^t) &= \det(C) = [r + (v - 1)\lambda](r - \lambda)^{v-1} = \\ &= [r + (k - 1)r](r - \lambda)^{v-1} = rk(r - \lambda)^{v-1}. \end{aligned}$$

□

**PROPOSIZIONE 10.3.3.** *(Disuguaglianza di Fisher). Se  $\mathbf{D}$  è un  $t-(v, k, \lambda)$  disegno con  $v > k$  ed è  $t > 1$ , allora risulta  $b \geq v$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $t$  è maggiore di 1,  $\mathbf{D}$  può essere riguardato come un  $2-(v, k, \lambda_2)$  disegno e quindi, se  $A$  è una sua matrice di incidenza, dalla (10.10) segue che è

$$\det(AA^t) = rk(r - \lambda_2)^{v-1}.$$

La (10.3) per  $i = 1$  diventa

$$\lambda_2(v-1) = r(k-1)$$

e quindi, essendo  $v > k$ ,  $r$  è maggiore di  $\lambda_2$ . Allora  $AA^t$  ha determinante non nullo, cioè è una matrice non singolare di rango  $v$ . Da questo segue che è

$$v = \text{rango}(AA^t) \leq \text{rango}(A) \leq \text{numero di colonne di } A = b$$

e l'asserto è provato.  $\square$

**PROPOSIZIONE 10.3.4.** *Una matrice di incidenza  $A$  di un 2-disegno simmetrico non banale è non singolare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Nella dimostrazione della proposizione precedente abbiamo visto che il rango di  $AA^t$  è  $b = v$ , quindi abbiamo

$$b = \text{rango}(AA^t) \leq \text{rango}(A) \leq b \Rightarrow \text{rango}(A) = b \Rightarrow \det(A) \neq 0.$$

$\square$

## 10.4 Costruzioni di disegni da altri disegni

Facciamo vedere come è possibile definire dei nuovi disegni a partire da uno assegnato  $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$  con parametri  $t, v, k, \lambda$ .

Iniziamo col provare che la coppia  $\bar{\mathbf{D}} = (\mathcal{P}, \bar{\mathcal{B}})$ , dove  $\bar{\mathcal{B}}$  è l'insieme dei complementari dei blocchi di  $\mathbf{D}$ , è ancora un  $t$ -disegno. Sia  $T$  un sottoinsieme di  $\mathcal{P}$  costituito da  $t$  elementi e contiamo il numero  $\nu$  di blocchi di  $\mathbf{D}$  incidenti  $T$  in qualche punto. Col principio di inclusione-esclusione si ottiene facilmente che è

$$\nu = \binom{t}{1}\lambda_1 - \binom{t}{2}\lambda_2 + \cdots + (-1)^{t+1}\binom{t}{t}\lambda.$$

Allora il numero  $\bar{\lambda}$  di elementi di  $\bar{\mathcal{B}}$  contenenti  $T$  è pari a

$$\bar{\lambda} = b - \nu = \binom{t}{0}\lambda_0 - \binom{t}{1}\lambda_1 + \binom{t}{2}\lambda_2 - \cdots + (-1)^{t+1}\binom{t}{t}\lambda = \sum_{i=0}^t (-1)^t \binom{t}{i} \lambda_i.$$

Poiché è evidente che  $\bar{\lambda}$  non dipende dall'insieme  $T$  ma solo dal suo ordine  $t$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$  è un  $t-(v, v-k, \bar{\lambda})$  disegno. Esso prende il nome di *disegno complementare di  $\mathbf{D}$* .

Fissato un punto  $x$  di  $\mathcal{P}$  chiamiamo *stella di blocchi* di centro  $x$  l'insieme  $x^*$  dei blocchi di  $\mathbf{D}$  passanti per  $x$  e indichiamo con  $\mathcal{P}^*$  l'insieme delle stelle di blocchi ottenibili dai punti del disegno. La coppia  $\mathbf{D}^* = (\mathcal{B}, \mathcal{P}^*)$ , come si verifica facilmente, è un  $1-(b, r, k)$  disegno, detto il *duale* di  $\mathbf{D}$ . Il duale del duale di  $\mathbf{D}$ , cioè  $\mathbf{D}^{**}$ , è isomorfo a  $\mathbf{D}$ ; infatti si vede subito che l'applicazione

$$x \in \mathcal{P} \rightarrow x^* \in \mathcal{P}^*$$

è un isomorfismo tra  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}^{**}$ .

**ESERCIZIO 10.4.1.** *Provare che il duale di un disegno  $\mathbf{D}$  é un  $s$ -disegno con  $s > 1$  se, e solo se,  $s$  blocchi di  $\mathbf{D}$ , comunque scelti, hanno un numero costante di punti in comune.*  $\square$

Sia ora  $x$  un elemento di  $\mathcal{P}$  e poniamo

$$\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_x \setminus \{x\} \quad , \quad \mathcal{B}_x = \{B \setminus \{x\} : x \in B \in \mathcal{B}\}.$$

La coppia  $\mathbf{D}_x = (\mathcal{P}_x, \mathcal{B}_x)$  é un  $(t-1) - (v-1, k-1, \lambda)$  disegno che si chiama *derivato* di  $\mathbf{D}$  rispetto ad  $x$ . Analogamente, posto

$$\mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \notin B\},$$

la coppia  $\mathbf{D}^x = (\mathcal{P}_x, \mathcal{B}^x)$  é un  $(t-1) - (v-1, k, \lambda_{t-1} - \lambda)$  disegno che si chiama *residuo* di  $\mathbf{D}$  rispetto ad  $x$ .

**ESERCIZIO 10.4.2.** *Provare che il derivato  $\mathbf{D}_x$  rispetto ad un punto  $x$  di un piano inversivo  $\mathbf{D}$  d'ordine  $n$  (cfr. 10.1.9) é un piano affine d'ordine  $n$  (cfr. 10.1.5). Provare inoltre che, se  $\mathbf{D}$  é immergibile, allora il piano affine  $\mathbf{D}_x$  é coordinabile su un campo finito.*  $\square$

**ESERCIZIO 10.4.3.** *Provare che il derivato rispetto ad un punto dell'estensione del piano di Fano (cfr. esempio 10.1.8) é un piano di Fano.*  $\square$