

Programma del corso di Metodi Numerici per l'Ottimizzazione (9 CFU)

A.A. 2009/2010

Prof. Daniela di Serafino

1. Argomenti trattati

Introduzione all'ottimizzazione

Formulazione di un problema di ottimizzazione. Esempi di problemi di ottimizzazione. Esistenza di soluzioni di un problema di ottimizzazione. Ottimizzazione locale e globale. Ottimizzazione vincolata e non vincolata. Classificazione dei problemi di ottimizzazione vincolati. Problemi di ottimizzazione convessi.

Ottimizzazione non vincolata

- **Generalità**

Direzioni di discesa. Condizioni di ottimalità del primo e del secondo ordine. Metodi line-search: schema generale, calcolo del passo mediante ricerca esatta ed inesatta, condizioni di Armijo e di curvatura, backtracking. Convergenza locale e globale, velocità di convergenza. Criteri di arresto.

- **Metodi del gradiente e del gradiente coniugato**

Minimizzazione di funzioni quadratiche convesse: metodo del gradiente, metodo del gradiente coniugato, convergenza e velocità di convergenza di tali metodi, metodo del gradiente coniugato preconditionato. Metodo del gradiente con backtracking per la minimizzazione di funzioni non lineari. Cenni ai metodi del gradiente coniugato per problemi non lineari. Complessità computazionale dei metodi suddetti.

- **Metodi di tipo Newton**

Metodo di Newton. Convergenza e velocità di convergenza del metodo di Newton. Metodi di Newton inesatti. Metodi di Newton con line search: metodo di Newton troncato (Newton-CG), metodo di Newton modificato, strategie per la modifica della matrice Hessiana. Convergenza e velocità di convergenza dei metodi di Newton inesatti e con line search. Metodi quasi-Newton: metodi BFGS e DFP, convergenza e velocità di convergenza dei metodi BFGS. Complessità computazionale dei metodi suddetti.

Ottimizzazione vincolata

- **Generalità**

Direzioni ammissibili e direzioni di discesa ammissibili. Condizioni di ottimalità del primo ordine (KKT) e del secondo ordine. Derivazione delle condizioni di ottimalità e interpretazione geometrica delle condizioni KKT nel caso di vincoli lineari. Funzione Lagrangiana e moltiplicatori di Lagrange. Analisi della sensibilità della funzione obiettivo alle perturbazioni dei vincoli.

- **Programmazione lineare: aspetti fondamentali**
Esempi di problemi di programmazione lineare. Interpretazione geometrica di tali problemi ed esempi di risoluzione grafica. Forme canoniche, forma standard. Richiami sui poliedri convessi. Poliedro ammissibile. Caratterizzazione dei vertici del poliedro ammissibile. Matrici e variabili di base. Soluzioni di base e vertici del poliedro ammissibile. Vertici degeneri. Teoremi fondamentali della programmazione lineare. Condizioni KKT per i problemi di programmazione lineare. Problema duale. Dualità e ottimalità (teorema della dualità della programmazione lineare).
- **Metodo del simplesso**
Introduzione al metodo del simplesso: idee di base. Fasi I e II del metodo. Fase II: caratterizzazione degli spigoli uscenti da un vertice, costi ridotti, criterio di ottimalità, criterio di illimitatezza, determinazione del passo e cambiamento della base, vertici degeneri e ciclaggio, terminazione finita. Fase I: problema artificiale, ammissibilità del problema originario, individuazione di una matrice di base ammissibile del problema originario. Cenni ai metodi di risoluzione di sistemi lineari nell'ambito del metodo del simplesso. Complessità computazionale del metodo del simplesso.
- **Metodi a punto interno per la programmazione lineare**
Introduzione ai metodi a punto interno: idee di base. Metodi primali-duali. Central path. Schema generale di un algoritmo a punto interno primale-duale. Metodi path-following short-step e long-step, ammissibili ed inammissibili. Algoritmo predictor-corrector di Mehrotra. Risoluzione dei sistemi KKT nel contesto dei metodi a punto interno: equazioni normali e sistema aumentato. Analisi della convergenza di un algoritmo path-following long-step ammissibile. Complessità computazionale dei metodi a punto interno.

2. Attività di laboratorio

Costituiscono parte integrante del programma del corso le attività di laboratorio di seguito elencate, svolte in ambiente Matlab.

- Sviluppo di funzioni che implementano i metodi del gradiente e del gradiente coniugato per la minimizzazione di funzioni quadratiche; confronto dei risultati ottenuti usando tali funzioni con quelli forniti dalla funzione Matlab `pcg`, con e senza preconditionatore (Jacobi, fattorizzazione incompleta di Cholesky), su un insieme di problemi test che metta in luce le proprietà dei metodi considerati.
- Sviluppo di una funzione che implementa il metodo del gradiente con ricerca inesatta basata su una strategia di backtracking, per la minimizzazione di funzioni non lineari generiche; applicazione di tale funzione ad un insieme di problemi test ed analisi dei risultati.
- Sviluppo di funzioni che implementano il metodo di Newton ed il metodo di Newton troncato; applicazione di tali funzione ad un insieme di problemi test ed analisi dei risultati.
- Confronto dei metodi BFGS e DFP implementati nella funzione Matlab `fminunc` su un insieme di problemi test.
- Risoluzione di problemi di programmazione lineare mediante Excel ed analisi dei risultati.
- Sviluppo, in ambiente Matlab, di una funzione che implementa il metodo del simplesso (fasi I e II) per la risoluzione di problemi di programmazione lineare in forma standard; applicazione di tale funzione ad un insieme di problemi test ed analisi dei risultati.

3. Riferimenti bibliografici

- G. Di Pillo, L. Palagi, *Note per il corso di Ottimizzazione – a.a. 2007-2008*, Università degli Studi di Roma “La Sapienza”, Dipartimento di Informatica e Sistemistica “A. Ruberti”, disponibile all’URL <http://www.dis.uniroma1.it/~or/gestionale/ottimizzazione/>.
- J. Nocedal, S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, 1999 (capitoli 3, 5, 6, 8, 14).
- P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981 (capitolo 3).
- D. Goldfarb, M.J. Todd, *Linear Programming*, in “Handbooks in Operations Research and Management Science – Optimization”, G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, M.J. Todd eds., Elsevier , 1984 (capitolo 2).
- J.E. Dennis Jr., R.B. Schnabel, *Numerical Methods for unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, 1996 (appendice B).

Caserta, 15 gennaio 2010

Il docente del corso
Prof. Daniela di Serafino