

Programma del corso di Metodi Numerici per l'Ottimizzazione (9 CFU)

A.A. 2007/2008

Prof. Daniela di Serafino

1. Argomenti trattati

Introduzione all'Ottimizzazione.

Formulazione di un problema di ottimizzazione. Esempi di problemi di ottimizzazione. Esistenza di soluzioni di un problema di ottimizzazione. Ottimizzazione locale e globale. Ottimizzazione vincolata e non vincolata. Classificazione dei problemi di ottimizzazione vincolati. Problemi di ottimizzazione convessi.

Ottimizzazione non vincolata.

▪ **Generalità.**

Direzioni di discesa. Condizioni di ottimalità del primo e del secondo ordine. Metodi line-search: schema generale dei metodi, calcolo del passo mediante ricerca esatta ed inesatta, condizioni di Armijo e di curvatura, backtracking. Convergenza locale e globale, velocità di convergenza. Criteri di arresto.

▪ **Metodi del gradiente e del gradiente coniugato.**

Minimizzazione di funzioni quadratiche convesse: metodo del gradiente, metodi delle direzioni coniugate, metodo del gradiente coniugato, convergenza e velocità di convergenza di tali metodi, metodo del gradiente coniugato preconditionato. Metodo del gradiente con backtracking per la minimizzazione di funzioni non lineari. Complessità computazionale dei metodi suddetti.

▪ **Metodi di tipo Newton**

Metodo di Newton. Convergenza e velocità di convergenza del metodo di Newton. Metodi di Newton inesatti. Metodi di Newton con line search: metodo di Newton troncato (Newton-CG), metodo di Newton modificato, strategie per la modifica della matrice Hessiana. Convergenza e velocità di convergenza dei metodi di Newton inesatti e con line-search. Metodi quasi-Newton: metodi BFGS e DFP, convergenza e velocità di convergenza dei metodi BFGS. Complessità computazionale dei metodi suddetti.

Ottimizzazione vincolata.

1. **Generalità.**

Direzioni ammissibili e direzioni di discesa ammissibili. Condizioni di ottimalità del primo ordine (KKT) e del secondo ordine. Derivazione delle condizioni di ottimalità e interpretazione geometrica delle condizioni KKT nel caso di vincoli lineari. Funzione Lagrangiana e moltiplicatori di Lagrange. Analisi della sensibilità della funzione obiettivo alle perturbazioni dei vincoli.

2. Programmazione lineare: aspetti fondamentali.

Esempi di problemi di programmazione lineare. Interpretazione geometrica di tali problemi ed esempi di risoluzione grafica. Forme canoniche, forma standard. Richiami sui poliedri convessi. Poliedro ammissibile. Caratterizzazione dei vertici del poliedro ammissibile. Matrici e variabili di base. Soluzioni di base e vertici del poliedro ammissibile. Vertici degeneri. Teoremi fondamentali della programmazione lineare. Condizioni KKT per i problemi di programmazione lineare. Problema duale. Dualità e ottimalità (teorema della dualità della programmazione lineare). Interpretazione economica della dualità.

3. Metodo del simplesso.

Introduzione al metodo del simplesso: idee di base. Fasi I e II del metodo. Fase II: caratterizzazione degli spigoli uscenti da un vertice, costi ridotti, criterio di ottimalità, criterio di illimitatezza, determinazione del passo e cambiamento della base, vertici degeneri e ciclaggio, terminazione finita. Fase I: problema artificiale, ammissibilità del problema originario, individuazione di una matrice di base ammissibile del problema originario. Risoluzione di sistemi lineari nel metodo del simplesso mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan. Complessità computazionale del metodo del simplesso.

4. Metodi a punto interno per la programmazione lineare.

Introduzione ai metodi a punto interno: idee di base. Metodi primali-duali. Central path. Schema generale di un algoritmo a punto interno primale-duale. Metodi path-following short-step e long-step, ammissibili ed inammissibili. Algoritmo predictor-corrector di Mehrotra. Risoluzione dei sistemi KKT nel contesto dei metodi a punto interno: equazioni normali e sistema aumentato. Analisi della convergenza di un algoritmo path-following long-step ammissibile. Complessità computazionale dei metodi a punto interno.

2. Attività di laboratorio

Costituiscono parte integrante del programma del corso le attività di laboratorio di seguito elencate. I programmi realizzati ed i risultati ottenuti nello svolgimento di tali attività devono essere presentati in sede di esame.

1. Sviluppo ed applicazione, in ambiente Matlab, di una funzione che implementa il metodo del gradiente per la minimizzazione di funzioni quadratiche; confronto di tale funzione con la funzione Matlab `pcg`, che implementa il metodo del gradiente coniugato, su un insieme di problemi test significativi.
2. Sviluppo ed applicazione, in ambiente Matlab, di una funzione che implementa il metodo del gradiente con ricerca inesatta basata su una strategia di backtracking, per la minimizzazione di funzioni non lineari generiche.
3. Confronto dei metodi BFGS, DFP e del gradiente implementati nella funzione Matlab `fminunc` su un insieme di problemi test significativi; confronto con l'implementazione del metodo del gradiente di cui al punto 2.
4. Risoluzione di problemi di programmazione lineare ed analisi dei risultati mediante Excel.
5. Sviluppo ed applicazione, in ambiente Matlab, di una funzione che implementa il metodo del simplesso (fasi I e II) per la risoluzione di problemi di programmazione lineare in forma standard.

6. Confronto del metodo a punto interno e del metodo del simplesso implementati nella funzione Matlab `linprog` su un insieme di problemi test significativi; confronto con l'implementazione del metodo del simplesso di cui al punto 5.

3. Riferimenti bibliografici

- [1] G. Di Pillo, L. Palagi, *Note per il corso di Ottimizzazione – a.a. 2007-2008*, Università degli Studi di Roma “La Sapienza”, Dipartimento di Informatica e Sistemistica “A. Ruberti”, disponibile all’URL <http://www.dis.uniroma1.it/~or/gestionale/ottimizzazione/>.
- [2] P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981 (capitolo 3).
- [3] D. Goldfarb, M.J. Todd, *Linear Programming*, in “Handbooks in Operations Research and Management Science – Optimization”, G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, M.J. Todd eds., Elsevier Science Publishers, 1984.
- [4] J. Nocedal, S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, 1999 (capitoli 3, 5, 6, 8, 14).

Caserta, 10 giugno 2008

Il docente del corso
Prof. Daniela di Serafino